

INTEGRALI TRIPLINotazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ zona di integrazione LIMITATA

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ funzione LIMITATA

} integrale proprio

Significato fisico Pensiamo

$A = \text{solido}$

$f(x, y, z) = \text{densità del materiale di cui è fatto } A$

In questo caso l'integrale è la massa totale di A .

Definizione

→ Caso banale: $A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$f(x, y, z) = \text{costante} = \lambda$



$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \cdot \text{Vol}(A) = \lambda (b-a)(d-c)(f-e)$$

↑
ha un segno

→ Caso semibanale: $f(x, y, z) = \text{step function}$

= comb. lineare delle funzioni del caso banale

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Vol}(A_i)$$

↑
valore di f in A_i

↑
i-esimo pezzo

Caso generale : definiamo $I^+(f)$ e $I^-(f)$ come in due variabili
(pensiamo sempre di estendere f a 0 fuori di A)

In generale $I^+(f, \mathbb{R}^3) \geq I^-(f, \mathbb{R}^3)$ e se coincidono si dice
che f è integrabile secondo Riemann...

Le proprietà dell'integrale sono le stesse di sempre.
— o — o —

Come si calcolano Formule di riduzione

- $3 = 1+1+1 \rightarrow$ int. sui parallelepipedi
- $3 = 2+1 \rightarrow$ integr. per COLONNE
- $3 = 1+2 \rightarrow$ " " SEZIONI

$3 = 1+1+1$ $A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x,y,z)$$

sono 6 possibili formule a seconda delle variabili
in cui prendo le variabili

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$ $f(x,y,z) = x+yz$

$$\begin{aligned} \iiint_A (x+yz) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz (x+yz) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \underbrace{\left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=1}^{z=3}}_{\text{primitiva in } z} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left\{ 3x + \frac{9}{2} y - x - \frac{1}{2} y \right\} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \{ 2x + 4y \} = \int_0^1 dx \left[2xy + 2y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \\ &= \int_0^1 dx \{ 4x + 8 \} = 2 + 8 = 10 \end{aligned}$$

Possibile alternativa

$$\iiint_A (x+yz) dx dy dz = \iiint_A x dx dy dz + \iiint_A yz dx dy dz$$

$$\iiint_A x \dots = \int_0^1 x dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz + \int_1^3 dz \int_0^2 dy \int_0^1 yz dx$$

$$= \int_0^1 4x dx + \int_1^3 z dz \int_0^2 y dy \int_0^1 1 dx$$

$$= \int_0^1 4x dx + 2 \int_1^3 z dz = 2 + [z^2]_1^3 = 2+8 = 10 \quad \checkmark$$

$3 = 2+1$ INTEGRALI PER COLONNE

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice normale rispetto al piano xy se si scrive nella forma

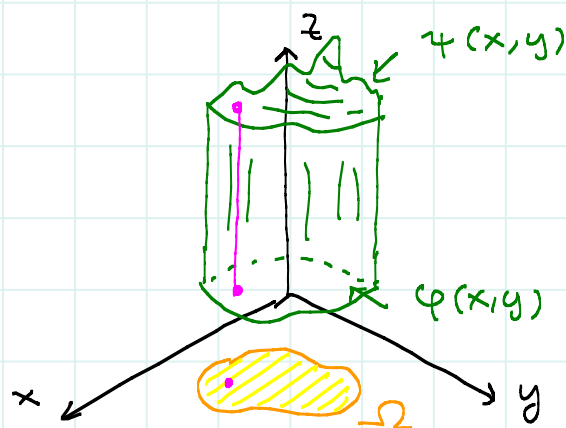
$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

In queste ipotesi

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz f(x,y,z)$$

Idea: fissati (x,y) nella base Ω , i p.ti che stanno in A sopra (x,y) sono quelli con $\varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y)$ e questa è la "colonna" su (x,y)



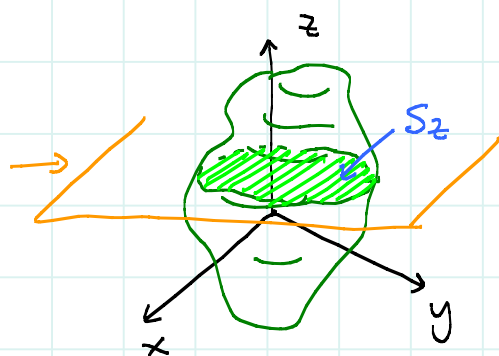
3 = 1 + 2 INTEGRALI PER SEZIONI

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove

- $z_{\min}$ e $z_{\max}$ sono la min / max quota dei p.ti di A
- fissato $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$, S_z è la sezione di A ad altezza z

piano ad
altezza z



Esempio 2 $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$ $\iiint_A z dx dy dz$

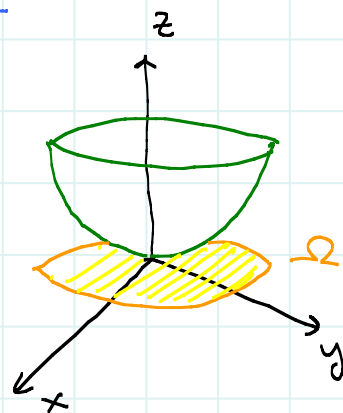
sopra
paraboloid
sotto
1

La solita ciotola

Per colonne Sensuoso:

→ base Ω

→ tappi sopra e sotto



$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$ = proiezione di A
sul piano base xy

Dalla def. di A: $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$
tappo sotto tappo sopra

$$\iiint_A z dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{x^2+y^2}^1 dz z = \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} dx dy (1 - (x^2 + y^2)^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta (1 - p^4) p$$

polari

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 (p - p^5) dp = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$$

Per sezioni $z_{\min} = 0$ $z_{\max} = 1$

Fissato z , la sezione S_z è un cerchio di raggio $R_z = \sqrt{z}$

Quindi

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad (z)$$

$$= \int_0^1 z \, dz \underbrace{\iint_{S_z} dx \, dy}_{\text{Area}(S_z) = \pi R_z^2 = \pi z}$$

$$= \pi \int_0^1 z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} \quad \ddot{\circ}$$

— 0 — 0 —

