

Esempio 1 Inf / sup / Max / Min di $\frac{x}{x^2+y^2}$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

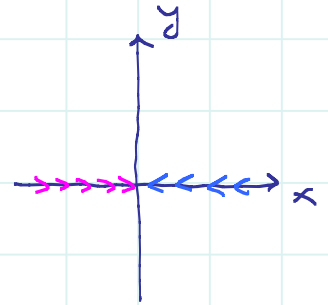
Due problemi: origine e non limitatezza.

⚡ $\text{Sup} = +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

⚡ $\text{Inf} = -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(-t, 0) = -\infty$$



Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + y^2 - 7x^2y$

$$f(\rho, \theta) = \rho^4 \cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 7\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

Di conseguenza $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} f(\rho, \theta) = +\infty \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

[Se $\cos \theta \neq 0$, allora vince ρ^4 ; se $\cos \theta = 0$, allora resta solo ρ^2]

In realtà però il limite non esiste, perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = -\infty \quad \circ$$

Questo ci dice anche che inf / sup su tutto $\mathbb{R}^2$ sono $\pm \infty$.

Esempio 3 Inf / sup su $\mathbb{R}^2$ di $f(x, y) = x^4 + y^2 - 7xy^2$

È ovvio che $\text{sup} = +\infty$. È ovvio anche che $\text{inf} = -\infty$ perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = -\infty$$

Esempio 4 Determinare per quali valori di $a > 0$ esiste

$$\min \{ x^4 + y^2 - 7|x|^a y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^4 - 7t^{a+2} = -\infty \text{ se } a \geq 2$$

Quindi per $a \geq 2$ non c'è speranza.

Per $a < 2$ speriamo in w. generalizzato, quindi speriamo che il limite sia $+\infty$. Questo è vero e si può dimostrare in due modi.

1° modo **PAREGGIARE GLI ESPONENTI**

Pongo $x = u$ $y = v^2$ e mi riduco

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} u^4 + v^4 - 7|u|^a v^2$$

[Ci sta sotto che $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$
se e solo se $u^2+v^2 \rightarrow +\infty$]

In coord. polari

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - 7\rho^{a+2} |\cos \theta| \sin^2 \theta \geq \boxed{m \rho^4 - 7\rho^{a+2}} \rightarrow +\infty \text{ se } a < 2$$

Morale: le palle in (u, v) diventano televisori in (x, y)
quindi i limiti a $+\infty$ sono equivalenti.

2° modo **DISTINGUO LE ZONE** Supponiamo per semplicità
che il limite sia solo nel
1° quadrante.

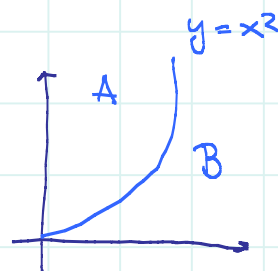
Nella zona A abbiamo che $y \geq x^2$,

quindi "comanda y" quindi

$$x^4 + y^2 - 7x^a y \geq y^2 - y^{\frac{a}{2}} y \rightarrow +\infty$$

uso
che
 $x \leq y^{\frac{1}{2}}$

quando $y \rightarrow +\infty$
e in A per forza
 $y \rightarrow +\infty$



Nella zona B abbiamo che $y \leq x^2$, quindi...

$$x^4 + y^2 - 7x^a y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso che } y \leq x^2}}{\geq} x^4 - 7x^a x^2 \rightarrow +\infty \quad (\text{se } a < 2)$$

quando $x \rightarrow +\infty$ e in B
per forza $x \rightarrow +\infty$

Esempio 5 $f(x, y) = y^2 + \arctan(xy)$

Inf / Sup / Max / Min in $\mathbb{R}^2$

$$\text{Sup} = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = +\infty$$

$$\text{Inf} \geq -\frac{\pi}{2} \quad \left[\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) \text{ N.E. perché } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0 \right]$$

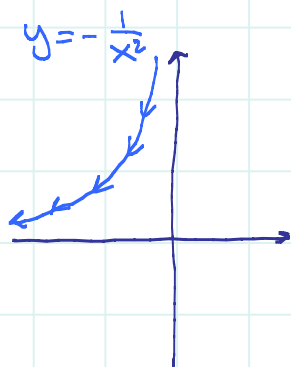
Dico $\text{sup} = -\frac{\pi}{2}$ e non è min. Non è min, perché non esistono pti in cui $f = -\frac{\pi}{2}$ (arctan dovrebbe essere $-\frac{\pi}{2}$)

Mi serve un sequo che va a $-\frac{\pi}{2}$.

Serve $y \sim 0$ e $xy \sim -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(-\frac{1}{t^2}, t\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 + \arctan\left(-\frac{1}{t}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$



Esempio 5 bis Come prima, ma in $Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$

$\text{Sup} = +\infty$ $\text{Inf} = \text{min} = 0$ con tutto l'asse x con $x \geq 0$
come pti di min.

Esempio 6 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - x^4 - y^6$ su tutto $\mathbb{R}^2$

$$\inf = -\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = -\infty$$

Spero che $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, y) = -\infty$ così ho w. generalizzato.

Facciamo il cambio di variabili

$$x = u^3 \quad y = v^2$$

e diventa

$$\lim_{u^2 + v^2 \rightarrow +\infty} 2u^6 + 3v^4 - u^{12} - v^{12} = +\infty$$

$$\dots \text{ passo in polari } \dots \leq 2\rho^6 + 3\rho^4 - u_0\rho^{12}$$

L'aver posto $y = v^2$ (qui come prima) crea problemi quando $y < 0$
però in questo modo abbiamo fatto il limite nel 1° quadrante
Negli altri quadranti è uguale per simmetria.

— 0 — 0 —