

Limiti all'infinito in più variabili $D \subseteq \mathbb{R}^d$ $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

Vogliamo definire

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{n.e.} & \textcircled{4} \end{cases}$$

Def. di $\textcircled{4}$ Nessuno dei precedenti

Def. di $\textcircled{2}$ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \in D$ con $\|x\| \geq R$
 $\uparrow$ anche enorme

Def. di $\textcircled{3}$ $\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ con $\|x\| \geq R$
 $\uparrow$ anche enorme negativo

Def. di $\textcircled{1}$ $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$ t.c. $L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon \quad \forall x \in D$ con $\|x\| \geq R$

Oss. Le definizioni assumono che

$$\forall R > 0 \quad D \setminus B(0, R) \neq \emptyset$$

Come dimostro che un limite all'infinito esiste?

In due variabili, spero di ottenere una disuguaglianza del tipo

$$f(p \cos \theta, p \sin \theta) \geq \underline{g(p)} \quad \uparrow g \text{ dipende solo da } p$$

$$\text{con } \lim_{p \rightarrow +\infty} g(p) = +\infty$$

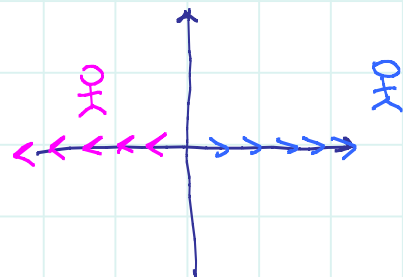
Come dimostro che non esiste? Trovo due sequenze che vanno all'infinito (defini fuori dalle palle) in cui f ha limite diverso.

Esempio 1 $D = \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = x+3y$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y)$ NON ESISTE

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$

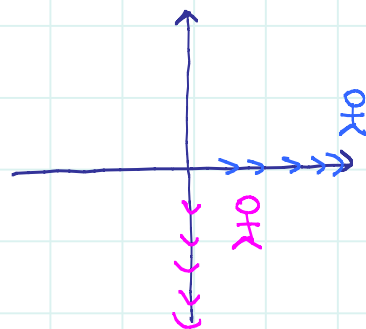
$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(-t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t = -\infty$



Esempio 2 $D = \mathbb{R}^2$ $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2+y^3$ N.E.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,-t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -t^3 = -\infty$



Esempio 3 $D = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} (x+y) = +\infty$

$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho(\cos \theta + \sin \theta)$

$\geq m \rho$

$\uparrow \min \{ \cos \theta + \sin \theta : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \} > 0$

per il solito discorso

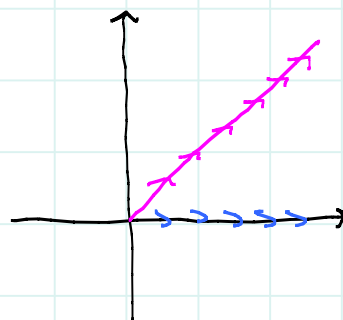
Ora basta osservare che $m \rho \rightarrow +\infty$ quando $\rho \rightarrow +\infty$



Esempio 4 $D = 1^o$ quadrante $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} xy$ NON ESISTE

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = +\infty$



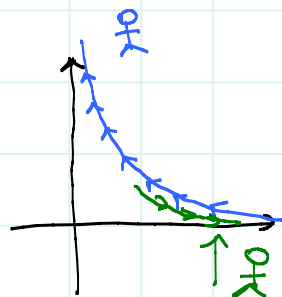
Esempio 4 bis

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x>0 \quad y>0}} xy$$

NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{t}, t\right) = 1$$

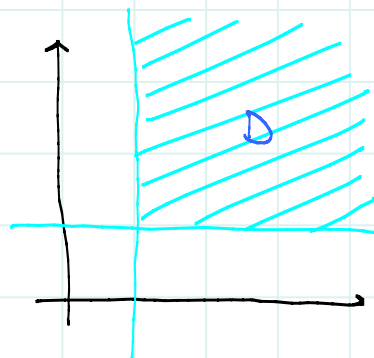


Troviamo un sequo che va a 0?

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(t, \frac{1}{t^2}\right) = 0$$

Esempio 5

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 1 \quad y \geq 1}} xy = +\infty$$



Provo con le polari

$$\underbrace{p^2 \cos \theta \sin \theta}_{\geq m} \stackrel{?}{\geq} m p^2$$

↑ NON è possibile perché in D
ci sono p.ti con $\theta \sim 0$ o con $\theta \sim \frac{\pi}{2}$

Dico che

$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad \forall (x,y) \in D$$

Se la dimostro ho finito. Infatti so già che $x+y \rightarrow +\infty$ su tutto il 1° quadrante, quindi in particolare in D. A quel punto concludo per confronto.

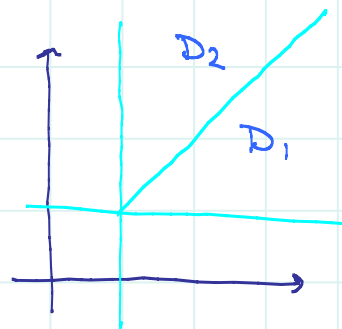
Come dimostro la disug.?

Se $(x,y) \in D_1$, allora

$$xy \underset{y \geq 1}{\geq} x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \underset{x \geq y \text{ in } D_1}{\geq} \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

Se $(x,y) \in D_2$, allora

$$xy \underset{x \geq 1}{\geq} y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \underset{y \geq x \text{ in } D_2}{\geq} \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$



Modo alternativo Faccio un cambio di variabili

$$x = 1+u \quad y = 1+v$$

in modo da ritrovare la condizione $u \geq 0, v \geq 0$

Nelle nuove variabili il limite diventa

$$\lim_{\substack{u^2+v^2 \rightarrow +\infty \\ u \geq 0, v \geq 0}} \underbrace{(1+u)(1+v)}_{1+u+v+uv \geq u+v}$$

Da qui si conclude per confronto.

Esempio 6 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{x+3xy}{x^2+2y^2}$ N.E.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0 \quad \ddot{}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+3t^2}{3t^2} = 1$$

Esempio 6 bis Stesso limite in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Il limite esiste e fa 0.

[È ovvio da $f(t,0)$ che se esiste, allora è nullo].

$$\boxed{0} \leq f(x,y) \leq \boxed{\frac{x+3x\sqrt{x}}{x^2}}$$

$\downarrow 0$ $\downarrow 0$

Ora basta osservare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in D}} x = +\infty \quad (\text{ad esempio perché } x \geq \frac{1}{2}(x+y) \text{ in } D)$$



Conclusione con i carabinieri.

— 0 — 0 —