

Esempio 1 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y)$
 $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(\rho, \theta) \rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

$$Jf(x, y) = (f_x, f_y) \quad Jp(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$J(f \circ P) = Jf(P(x)) \cdot Jp(x) = (f_x \ f_y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$f \circ P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} = \underbrace{(f_x \cos \theta + f_y \sin \theta)}_{\frac{\partial (f \circ P)}{\partial \rho}} , \underbrace{(f_x (-\rho \sin \theta) + f_y \rho \cos \theta)}_{\frac{\partial (f \circ P)}{\partial \theta}}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$
 $f(x, y) = x^2 + y^2$

Come è fatto A ? $\rightarrow$ È chiuso (perché c'è $\leq$)

$\rightarrow$ È limitato ($-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$)

Quindi è compatto.

L'insieme A contiene il cerchio

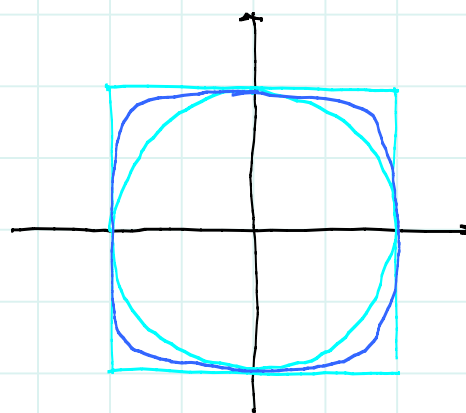
$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Perché? Basta osservare che

$$x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2$$

Quindi se $x^2 + y^2 \leq 1$, a maggior ragione

$$x^4 + y^4 \leq 1$$

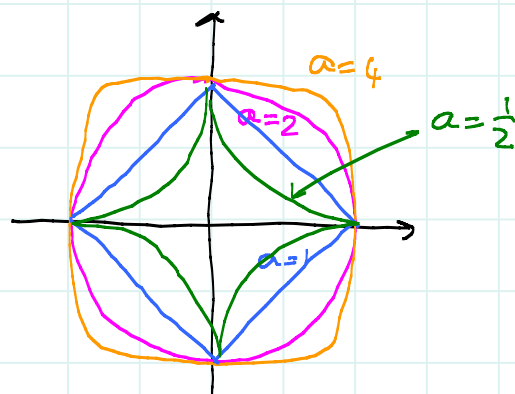


In generale gli insiemi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2: |x|^a + |y|^a \leq 1\}$ sono "televisori" tanto più piatti quanto a è grande

W max e min. esistono

Sing. interni: $\emptyset$

Stas. interni



Bordo: moltiplicatore con $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

1° sistema

$$g_x = 0$$

$$4x^3 = 0$$

$$g_y = 0$$

$$4y^3 = 0$$

$$g = 0$$

incompatibile $\leadsto \emptyset$

2° sistema

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g = 0$$

$$\begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 2y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$1^a \text{ equ. } 4\lambda x^3 - 2x = 0 \leadsto 2\lambda x^3 - x = 0 \leadsto x(2\lambda x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0 \leadsto y = \pm 1 \text{ dall'ultima} \leadsto \boxed{(0, \pm 1)}$$

$$x(2\lambda x^2 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{2\lambda x^2 = 1}$$

$$2^a \text{ equ.} \leadsto y(2\lambda y^2 - 1) = 0 \rightarrow \boxed{2\lambda y^2 = 1}$$

$$y = 0 \leadsto x = \pm 1 \leadsto \boxed{(\pm 1, 0)}$$

$$\text{Se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \text{ allora } x^2 = y^2 \leadsto x^4 = y^4 \leadsto 2x^4 = 1 \leadsto x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\left(\pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}, \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right)} \text{ 4 possibili punti}$$

$$y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

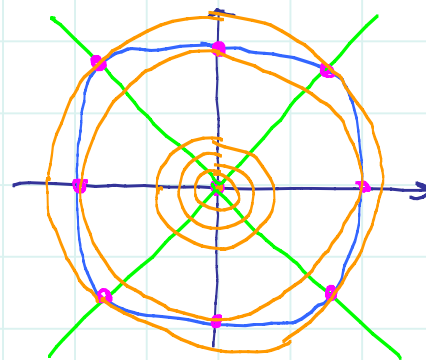
Alla fine abbiamo 3 candidati da confrontare

$$f(0,0) = \boxed{0} \leftarrow \text{min}$$

$$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1$$

$$f(\text{altri } 4) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{2}} \leftarrow \text{max}$$

$\uparrow$
 p.ti di max



Le linee di livello sono $x^2 + y^2 = \lambda$

Variable Max/min di $f(x,y) = x^2 + y^2$ su
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$

$\uparrow \uparrow$
 solo il bordo del
 televisore

Weierstrass $\leadsto$ OK

NON ESISTONO PUNTI INTERNI AD $\tilde{A}$, QUINDI NON HA SENSO
 CERCARE P.TI STAZ. O SING. INTERNI

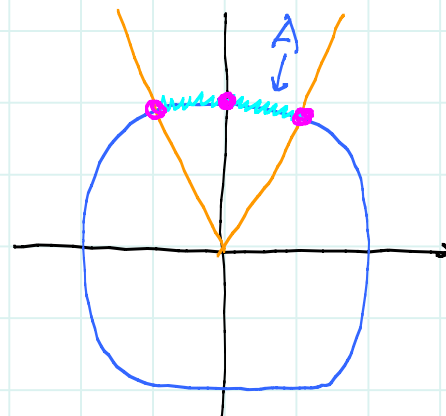
"A è solo bordo" $\leadsto$ con i mult. trovo gli stessi 8 p.ti di prima
 e adesso

$$\text{min} = 1 \quad \text{p.ti di min} = (\pm 1, 0) \text{ e } (0, \pm 1)$$

$$\text{max} = \sqrt{2} \quad \text{p.ti di max come prima.}$$

Nuova variable $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1, y \geq 2|x|\}$

Come prima è solo bordo, che
 non è tutto il luogo di zeri
 di $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$



L'unico candidato che resta è

$(0,1)$ ma devo aggiungere
 d'ufficio i bordi dei bordi, che

si trovano facilmente. So già che saranno p.ti di max.

Esempio?

$$f(x,y) = |x+y|$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0\}$$

Studiamo prima max e min di

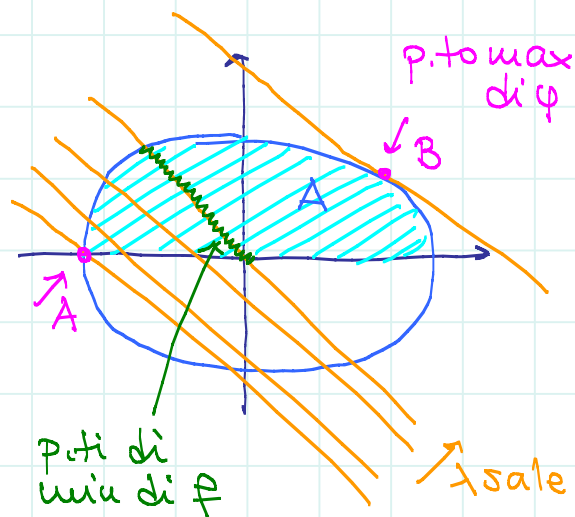
$$\varphi(x,y) = x+y$$

Facendo il conto con i
moltiplicatori trovo il p.to di
max

$$\min \varphi = -\sqrt{3}$$

$$\max \varphi = \text{numero positivo} > \sqrt{3}$$

p.to
di min
di φ



p.to di
min di f

Per max f se la giochiamo $|f(A)|$ e $\varphi(B)$, e vince $\varphi(B)$.

Per min f basta guardare dove $f(x,y) = 0$, quindi
abbiamo in A infiniti p.to di min.

— o — o —