

MATRICE JACOBIANA Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

La matrice jacobiana $Jf(x)$ è la matrice che ha come righe i gradienti di $f_1, \dots, f_m$. Quindi

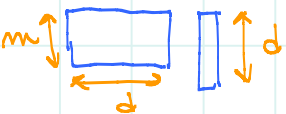
$$[Jf(x)]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

↑
riga i
colonna j

Se f è tutto continuo vale la formula del differenziale

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + Jf(x_0)R + o(|R|)$$

vettore di $\mathbb{R}^n$
pensato
come colonna



matrice $\times$ vettore

vettoriale

$o(|R|)$ è una funzione g a valori in $\mathbb{R}^m$ t.c.

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{|g(R)|}{|R|} = 0$$

↑ m variabili
↑ d variabili

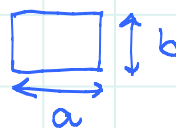
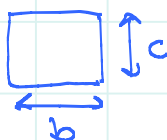
CHAIN RULE Analisi 1: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

Analisi 2 Sia $g: \mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b$

Sia $f: \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^c$

Allora $f \circ g$ ha senso $\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^c$ e sotto ipotesi ragionevoli

$$J[f(g(x))] = Jf(g(x)) \cdot Jg(x)$$



Le dimensioni
sono
compatibili

Esempi $f(x, y) = x^2 + xy$
 $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$

per esempio $f(t^5, t^2)$

$$\varphi'(t) = f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t)$$

$$\varphi(t) = f(t^5, t^2) = t^{10} + t^7 \quad \leadsto \quad \varphi'(t) = 10t^9 + 7t^6$$

$$f_x(x, y) = 2x + y \quad f_y(x, y) = x$$

Usando la formula di sopra

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (2t^5 + t^2) \cdot 5t^4 + t^5 \cdot 2t \\ &= 10t^9 + 5t^6 + 2t^6 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Esempio 2 $f(x, y)$ e costruiamo

$$g(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

Calcolare $g_v(u, v)$

$$g_v(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \varphi_v(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \psi_v(u, v)$$

$f_x \varphi_v + f_y \psi_v$

Back to funzione implicita ... supponiamo di sapere che

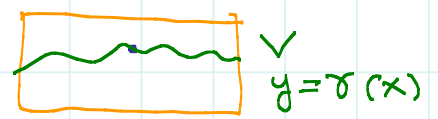
$$g(x, \gamma(x)) = 0$$

e supponiamo di aver dimostrato che γ è derivabile. Allora

$$0 = [g(x, \gamma(x))] = g_x(x, \gamma(x)) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata di } x \\ \text{risp. a } x}}{1} + g_y(x, \gamma(x)) \cdot \gamma'(x)$$

$$\leadsto \gamma'(x) = - \frac{g_x(x, \gamma(x))}{g_y(x, \gamma(x))}$$

Dimostrazione del moltiplicatore



Supponiamo che $(x_0, y_0) \in V$ sia p.to di max/min per $f(x, y)$ ristretta a V .

→ Se $\nabla g(x_0, y_0) = 0$, allora amen.

→ Se $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, allora mettiamo che sia $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ (l'altro caso è simmetrico).

Allora nella finestrella V è il grafico di $g(x)$, quindi la restrizione di f a V è la funzione

$$\varphi(t) = f(t, g(t)) \quad t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

Questa funzione ha in $t = x_0$ un p.to di max/min.

Ma allora $\varphi'(x_0) = 0$. Per la regola delle

$$\varphi'(t) = f_x(t, g(t)) \cdot 1 + f_y(t, g(t)) \cdot g'(t)$$

e quindi per $t = x_0$:

$$0 = \varphi'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) g'(x_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0) - \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} g_x(x_0, y_0)$$

λ

Abbiamo quindi dimostrato che $f_x(x_0, y_0) = \lambda g_x(x_0, y_0)$

Resta da dimostrare che

$$f_y(x_0, y_0) = \lambda g_y(x_0, y_0)$$

ma questo è ovvio dalla definizione di λ .

— o — o —

Calcolo del gradiente in coord. polari

Data $f(x, y)$ posso costruire

$$g(p, \theta) = f(p \cos \theta, p \sin \theta)$$

Calcolare $|\nabla g(p, \theta)|^2$ sapendo $|\nabla f(x, y)|^2$

$$\begin{aligned} g_p &= f_x \cdot x_p + f_y \cdot y_p \quad \leadsto \quad g_p(p, \theta) = f_x(p \cos \theta, p \sin \theta) \cdot \cos \theta \\ g_\theta &= f_x \cdot x_\theta + f_y \cdot y_\theta \quad \quad \quad + f_y(p \cos \theta, p \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_p &= f_x \cdot \cos \theta + f_y \sin \theta \\ g_\theta &= f_x (-p \sin \theta) + f_y \cdot p \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_p^2 &= f_x^2 \cos^2 \theta + f_y^2 \sin^2 \theta + 2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta \\ g_\theta^2 &= p^2 f_x^2 \sin^2 \theta + p^2 f_y^2 \cos^2 \theta - 2 p^2 f_x f_y \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

$$g_p^2 + \frac{1}{p^2} g_\theta^2 = f_x^2 + f_y^2$$

↑ g_θ conta sempre meno
man mano che p cresce

Esercizio (hard) Fare la formula per $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$

→ in coord. polari

→ in coord. sferiche

— o — o —