

Max e min in più variabiliCaso compatto

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme. A si dice

- CHIUSO se $\mathbb{R}^d \setminus A$ è aperto, cioè

$$\forall x \notin A \exists r > 0 \text{ t.c. } B(x, r) \cap A = \emptyset$$

- LIMITATO se

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } A \subseteq B(0, R)$$

- COMPATTO se è CHIUSO + LIMITATO.



Teorema (WEIERSTRASS) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme $\neq \emptyset$.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) A è compatto.

Allora esistono

$$\max \{ f(x) : x \in A \}$$

$$\min \{ f(x) : x \in A \}$$

Oss. Max e min sono NUMERI e sono per forza unici (quando esistono).

Non vanno confusi con i p.t. di max/min che sono gli $x \in A$ in cui tali valori sono assunti. Tali p.t. possono non essere unici.

Oss. Se almeno un'ipotesi del tes. di W. fallisce, allora BOTH, cioè max/min possono esistere oppure no.

Come trovo max/min? Indago tra i candidati p.ti di max/min i quali ricadono in 3 categorie.

① P.ti **STAZIONARI INTERNI**: p.ti x interni ad A (cioè $\exists r > 0$ t.c. $B(x, r) \subseteq A$) dove **$\nabla f(x) = 0$**
sistema

② P.ti **SINGOLARI INTERNI**: p.ti x interni ad A dove $\nabla f(x)$ NON ESISTE.

③ P.ti **BORDO DI A**: p.ti $x \in A$ che non sono interni.
 $\downarrow$ ad analisi il bordo di A è + complicato

Dim. Sia $x \in A$ un p.to di min/max. Cosa può succedere?

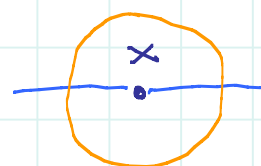
$\rightarrow x$ non è interno $\leadsto$ sta nella ③

$\rightarrow x$ è interno e $\nabla f(x)$ non esiste $\leadsto$ sta nella ②

$\rightarrow x$ è interno e $\nabla f(x)$ esiste. Se dimostro che $\nabla f(x) = 0$, allora sta nella ①.

Quindi devo dim. che in un p.to di max/min interno le derivate parziali, se esistono, si annullano.

Basta osservare che le derivate parziali sono le derivate di analisi della restrizione di f ad opportune rette passanti per x , e tali restrizioni hanno max/min in quel p.to.



Oss. Il discorso fatto alla fine vale in particolare per i p.ti di max/min LOCALE di f .

Un p.to x_0 è di max. locale per f se

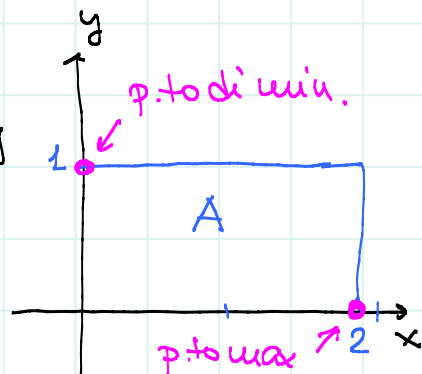
$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

Strumenti per trovare max/min

- Disuguaglianze elementari
- Linee di livello
- Parametrizzazione del bordo
- Moltiplicatori di LAGRANGE

Esempio 1 $f(x,y) = x - 3y$ $A = [0,2] \times [0,1]$

Ok le ipotesi di W $\Rightarrow$ max e min esistono



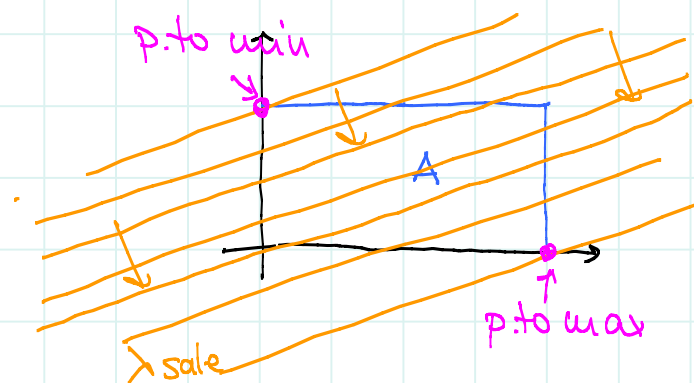
Max = 2 $f(x,y) = \underbrace{x}_{\leq 2} - \underbrace{3y}_{\geq 0} \leq 2$ sempre e vale l'uguale se e solo se $x=2$ e $y=0$

Min = -3 $f(x,y) = \underbrace{x}_{\geq 0} - \underbrace{3y}_{\geq -3} \geq -3$ sempre e vale l'uguale se e solo se $x=0$ e $y=1$

Stessa cosa con le linee di livello

Disegno le linee di livello di f

$$x - 3y = \lambda$$
$$y = \frac{1}{3}x - \frac{\lambda}{3}$$

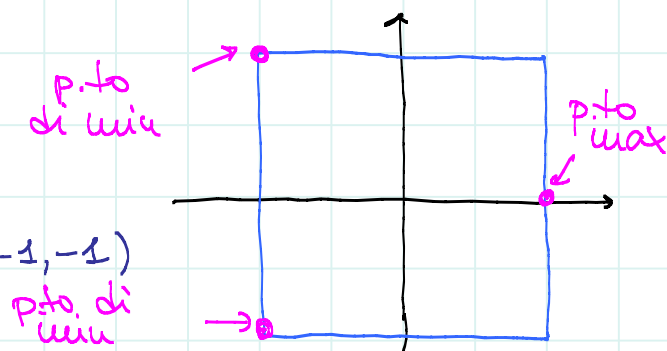


P.to di min: p.to dell'insieme in cui λ è il + piccolo possibile
" max: " " + grande "

Esempio 2 $f(x,y) = 2x - y^2$ $A = [-1,1] \times [-1,1]$

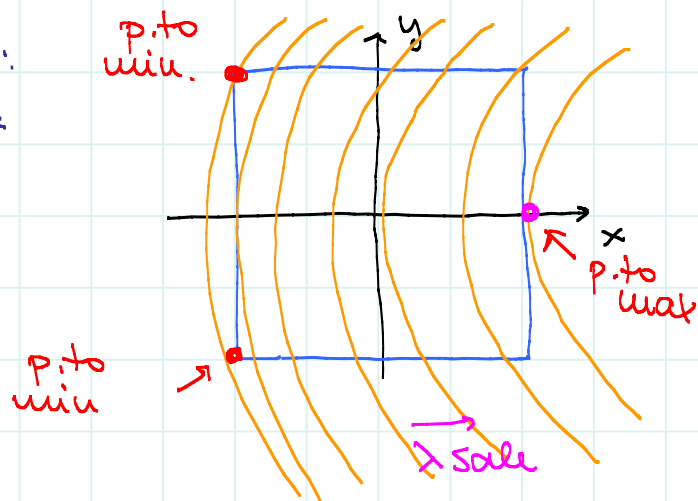
Max = 2 p.ti di max: (1,0)

Min = -3 p.ti di min: (-1,1) e (-1,-1)



Vediamo con le linee di livello:

$$2x - y^2 = \lambda \rightsquigarrow x = \frac{1}{2}y^2 + \frac{\lambda}{2}$$

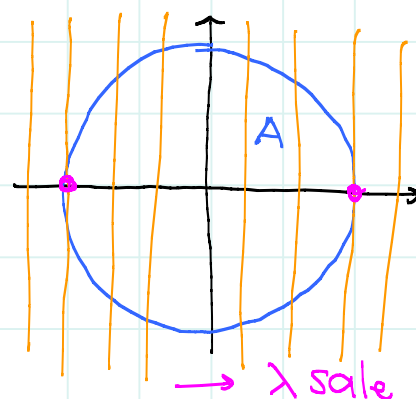


Esempio 3 $f(x,y) = x$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

Max = $\sqrt{2}$ p.to di max : $(\sqrt{2}, 0)$

min = $-\sqrt{2}$ p.to di min : $(-\sqrt{2}, 0)$

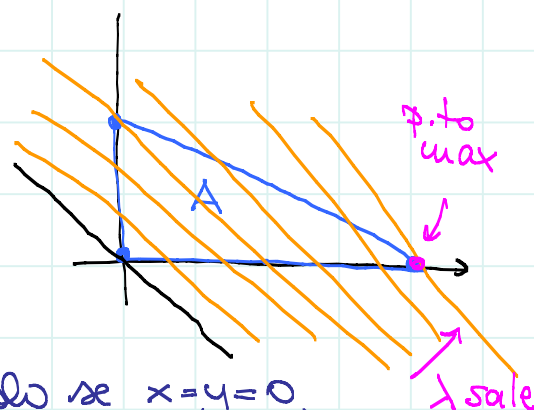
Linee di livello : $x = \lambda$



Esempio 4 $f(x,y) = x+y$
 $A = \text{triangolo con vertici}$
 in $(0,0), (2,0), (0,1)$

Min = 0 p.to di min : $(0,0)$

$f(x,y) = \underset{\geq 0}{x} + \underset{\geq 0}{y} \geq 0$ con = se e solo se $x=y=0$.



Linee di livello : $x+y = \lambda \rightsquigarrow y = -x + \lambda$

Max = 2 p.to di max = $(2,0)$

Oss. Le cose sarebbero cambiate con $f(x,y) = x+4y$
 (provare per esercizio)

Oss. Nell'esempio non ci sono p.ti stat. interni $\nabla f(x,y) = (1,1)$
 " " " " sing. interni