

Analisi 1: funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

" 2: " $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o anche $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

" 3: funzioni di "infinita variabili"

Notazione vettoriale: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$

" con le componenti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, \dots, x_{37}) \in \mathbb{R}^{37}$

$$\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2\}^{1/2}$$

Prod. scalare canonico

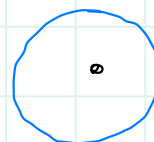
$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$$

↑
angolo compreso fra
i due vettori

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = |x|$$

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, y)$$



Palle

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

↑
 $\in \mathbb{R}^n$ ↑
numero
> 0

< r

CHIUSA

APERTA

Def. Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se

$$\forall x \in D \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \subseteq D$$



Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il complementare è aperto, cioè

$$\forall x \notin D \quad \exists r > 0 \quad \text{t.c.} \quad B(x, r) \cap D = \emptyset$$

Definizioni di limite

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} \nearrow +\infty \\ \rightarrow -\infty \\ \searrow l \in \mathbb{R} \\ \swarrow \text{Non esistere} \end{cases}$$

- ①
- ②
- ③
- ④

Def. di ④: Nessuno dei precedenti

Def. di ① Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

$\uparrow$
anche enorme

Def. di ② Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

Oss. Queste definizioni hanno senso se x_0 è un p.to di accumulazione per D cioè

$$\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Piccola variante: si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } l < f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, r) \cap D \setminus \{x_0\}$$

Def. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

METATEOREMA Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari usando operazioni algebriche e/o composizioni sono continue dove non ci sono problemi burocratici (denominatori che si annullano, radici di roba negativa, ...)