

Complementi di Analisi Matematica – A.A. 2023/24

Programma per argomenti

Aggiornato al 22 settembre 2023

Preliminari/Prerequisiti

- Tutto il precorso, in particolare saper disegnare insiemi del piano descritti mediante equazioni e/o disequazioni e saper risolvere sistemi di equazioni.
- Tutto il corso di Analisi Matematica I (studi di funzione, limiti, calcolo integrale).
- Tutto il corso di Algebra Lineare (vettori, geometria analitica nel piano e nello spazio, matrici, forme quadratiche).

Calcolo differenziale in più variabili

- Lo spazio $\mathbb{R}^n$. Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili: linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.
- Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Relazione tra il limite ed il limite delle restrizioni.
- Limiti all'infinito per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro significato geometrico. Mancanza di relazioni tra l'esistenza delle derivate parziali e direzionali in un punto e la continuità nel punto stesso.
- Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
- Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili.
- Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili. Se in un punto di massimo o minimo interno una funzione è differenziabile, allora il suo gradiente si annulla.
- Richiami sulle forme quadratiche in più variabili: nozione di forma definita positiva e definita negativa.
- Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario. Convessità e concavità in più variabili.
- Insiemi compatti in $\mathbb{R}^n$. Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass nel caso di insiemi non limitati.
- Massimi e minimi vincolati: metodo delle linee di livello.

- Massimi e minimi vincolati: metodo di parametrizzazione del vincolo.
- Massimi e minimi vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- Calcolo differenziale per funzioni da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}^m$. Matrice Jacobiana.
- Derivazione di funzioni composte. Derivazione di integrali dipendenti da parametro.
- Teorema delle funzioni implicite.

Calcolo integrale in più variabili

- Integrale di Riemann per funzioni di due o tre variabili e suo significato geometrico/fisico.
- Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
- Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
- Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali doppi o tripli.
- Calcolo di aree, volumi e baricentri mediante integrali doppi e tripli.
- Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari, cilindriche e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
- Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi.
- Solidi di rotazione. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.
- Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.

Curve, superfici, calcolo vettoriale

- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
- Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
- Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
- Forme differenziali.
- Integrale di una forma differenziale lungo una curva. Forme differenziali esatte e potenziali.
- Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Forme differenziali chiuse. Relazioni tra forme differenziali chiuse ed esatte.
- Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
- Area di una superficie: definizione e calcolo.
- Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.
- Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
- Operatori differenziali: divergenza, rotore, Laplaciano, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
- Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
- Formula di Gauss-Green e teorema della divergenza: enunciati ed applicazioni.
- Formula di Stokes (teorema del rotore): enunciati ed applicazioni.