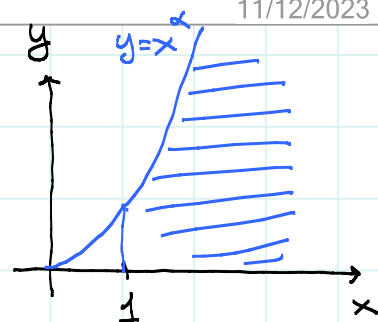


Esempio 1

$$\iint_{D_\alpha} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy$$

$$\text{dove } D_\alpha := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, 0 \leq y \leq x^\alpha\}$$



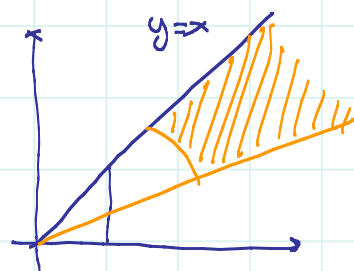
$$\text{Moralmente: } f(x,y) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{p^2}$$

 $\alpha = 1$

$$\iint_{D_1} \frac{\arctan(xy)}{x^2+y^2} dx dy \geq$$

$$\int_{42}^{+\infty} dp \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\arctan(p^2 \cos\theta \sin\theta)}{p^2} \quad \begin{matrix} \geq m > 0 \text{ per il solito discorso} \\ p \uparrow \downarrow \end{matrix}$$

$$= \frac{\pi}{8} \int_{42}^{+\infty} \frac{\arctan(wp^2)}{p} dp = +\infty \text{ per comp. asint. con } \frac{1}{p}$$



$\alpha > 1$ Basta osservare che $D_\alpha \supseteq D_1$ e quindi diverge a maggior ragione

(Discorso analogo valeva anche se $x \geq 1$ era $x \geq \frac{1}{10}$. Non era vero che $D_\alpha \supseteq D_1$, ma il discorso del 42 funzionava)

 $\alpha < 1$

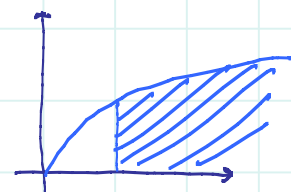
$$\iint_{D_\alpha} \dots \leq \frac{\pi}{2} \iint_{D_\alpha} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \iint_{D_\alpha} \frac{1}{x^2} dx dy$$

frangibile + grande

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^{2-\alpha}}$$

Converge se $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$
 ☺



Esempio 2 $\iint_{D_\alpha} \frac{xy^3}{x^8+y^8} dx dy$ D_α come prima

Per quali valori di α converge

meno intorno di (0,0)

Questo converge su tutto il quadrante perché $f(x,y) = \frac{\rho^4}{\rho^8} = \frac{1}{\rho^4}$

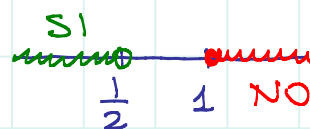
Proviamo con $\iint_{D_\alpha} \frac{xy^3}{x^4+y^4} dx dy$

$\boxed{\alpha=1}$ $\iint_{D_1} \dots \geq \int_2^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \underbrace{\frac{\cos\theta \sin^3\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}_{\text{questo è un numero positivo}} \rho = +\infty$

Quindi per $\alpha \geq 1$ diverge

Discorso cartesiano $\iint_{D_\alpha} \dots = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} dy \frac{xy^3}{x^4+y^4}$

$\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} \frac{xy^3}{x^4} = \int_1^{+\infty} dx \frac{1}{x^3} \int_0^{x^\alpha} y^3 dy = \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} dx \frac{x^{4\alpha}}{x^3}$ e questo converge
 $\Leftrightarrow 3-4\alpha > 1$
 $4\alpha < 2 \quad \alpha < \frac{1}{2}$



$\boxed{\alpha < 1}$ $\iint_{D_\alpha} \dots \geq \iint_{D_\alpha} \frac{xy^3}{x^4+x^4} =$

↑
al denominatore
ho messo y al posto
di x. Posso perché
 $y \leq x$ in D_α se $\alpha \leq 1$

$\frac{1}{2} \int_1^{+\infty} dx \int_0^{x^\alpha} dy \frac{y^3}{x^3}$

e questo diverge se $\alpha \geq \frac{1}{2}$

Variante : se volevo l'esistenza del limite all'infinito in D_α la condizione era $\alpha < 1$ (stessi ragionamenti di sopra)

Esercizio 3 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^8 + x^5 \arctan(xy) - y = 2023 \}$

È limitato?

Oss. Se $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$, allora (basta $\lim > 2023$)

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 2023 \}$ è limitato

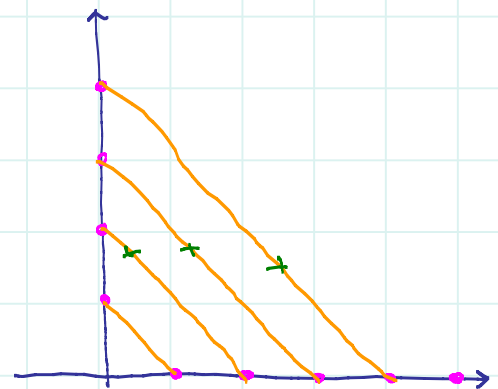
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = -\infty$$

Ne segue che

$$f(n,0) > 2023 \quad \text{per } n \text{ grande}$$

$$f(0,n) < 2023 \quad \text{per } n \text{ grande}$$



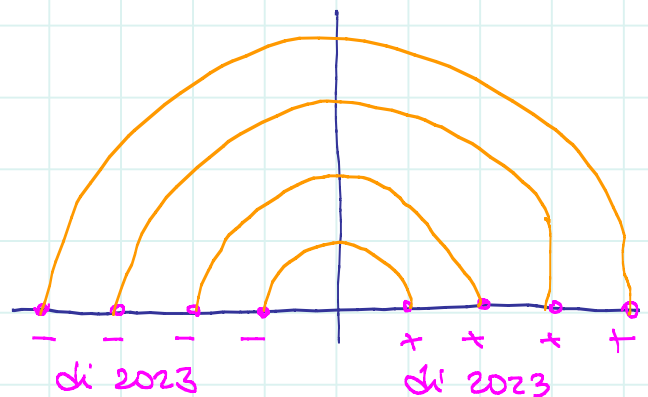
Quindi su ogni segmento che va da $(n,0)$ a $(0,n)$ con n grande, f deve valere 2023 da qualche parte.

Per n grande questi p.ti tendono all'infinito.

Variante usando i cerchi se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,0) = -\infty$$



— o — o —