

Esercizio 1 $\iint_Q \frac{\arctan(xy^2)}{x^4+xy^4} dx dy$ $Q = \mathbb{R}^2$ quadrante

Doppio problema: nell'origine e all'infinito

All'infinito: $f(x,y) \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^4}$ quindi converge perché $4 > 2$

Nell'origine: $f(x,y) \sim \frac{xy^2}{x^4+xy^4} \sim \frac{\rho^3}{\rho^4} = \frac{1}{\rho}$ quindi converge perché $1 < 2$

Rigorosamente: $0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy^2}{x^4+xy^4}$
 $\uparrow$
 qui uso $\arctan t \leq t$ per $t \geq 0$

Esercizio 1bis $\iint_Q \frac{\arctan(xy^a)}{x^4+xy^4} dx dy$

All'infinito non cambia nulla

Nell'origine $\sim \frac{\rho^{1+a}}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{3-a}}$ quindi converge $\Leftrightarrow 3-a < 2$
 $\Leftrightarrow a > 1$

Rigoroso:

$$f(x,y) \leq \frac{xy^a}{x^4+xy^4} = \dots \text{ passo in polari e questo converge } \Leftrightarrow a > 1$$

Non ho finito: $\rightarrow$ per $a > 1$ quello sopra conv., quindi converge quello sotto che è $\leq$

$\rightarrow$ per $a \geq 1$ quello sopra diverge, quindi BOH

$\boxed{a \leq 1}$ $\iint_Q \frac{\arctan(xy^a)}{x^4+xy^4} dx dy \geq \int_0^1 \rho d\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\arctan(\rho^{a+1} \cos\theta \sin^a\theta)}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)}$
 $\uparrow$
 voglio restare lontano dagli assi

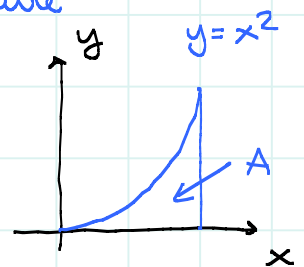
$$\geq \int_0^1 dp \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\arctan(m_a p^{a+1})}{2p^4} p$$

dove $m_a := \min \{ \cos \theta \sin^a \theta : \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \} > 0$ per i soliti discorsi

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan(m_a p^{a+1})}{p^3} dp}_{\sim \frac{m_a p^{a+1}}{p^3}} \text{ e si conclude}$$

Esercizio 1 ter

$$\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^4+y^4} dx dy$$



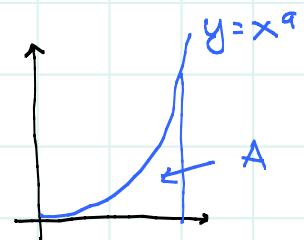
Idea: la zona A si schiaccia sugli assi dove xy è "piccolo"

$$\iint_A \dots \leq \iint_A \frac{xy}{x^4+y^4} dx dy \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{uso} \\ \text{def. di A}}}{\leq} \iint_A \frac{x^3}{x^4+y^4} dx dy \leq \iint_B \frac{x^3}{x^4+y^4} dx dy$$

e questo converge perché è $\sim \frac{1}{p}$ con $1 < 2$

Esercizio 2 $\iint_{A_a} \frac{1}{x^4+y^4} dx dy$

Per quali valori di a converge



$$\begin{aligned} \iint_{A_a} \dots &= \int_0^1 dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^4+y^4} \leq \int_0^1 dx \int_0^{x^a} dy \frac{1}{x^4} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x^4} \cdot x^a dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{4-a}} dx \end{aligned}$$

e questo converge $\Leftrightarrow 4-a < 1$, cioè $a > 3$.

Così ho dimostrato che per $a > 3$ l'integrale iniziale converge.

Resta da dim. che per $a \leq 3$ diverge.

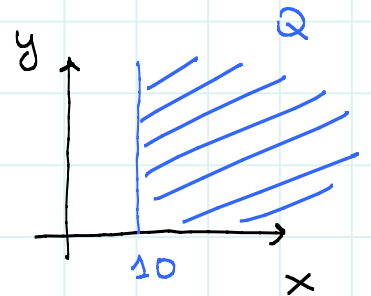
$$\iint_{A_a} \dots \geq \iint_{A_3} \frac{1}{x^4 + y^4} dx dy \geq \iint_{A_3} \frac{1}{x^4 + x^{12}} dx dy$$

$\uparrow$ per $a \leq 3$ si ha $A_a \supseteq A_3$ $\uparrow$ uso che $y \leq x^3$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{x^3} dy \frac{1}{x^4 + x^{12}} = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + x^{12}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x + x^9} dx \sim \frac{1}{x}$$

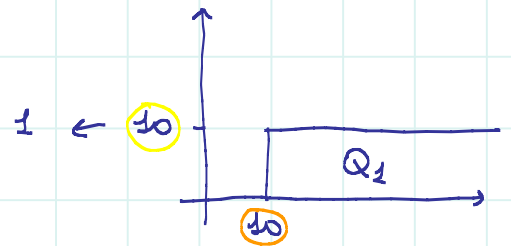
e quindi diverge.

Esercizio 3 $\iint_Q \frac{\log(x^2 + y^2)}{x^8} dx dy$



$$\iint_{Q_1} \dots \geq \iint_{Q_1} \frac{\log(x^2)}{x^{10}} dx dy$$

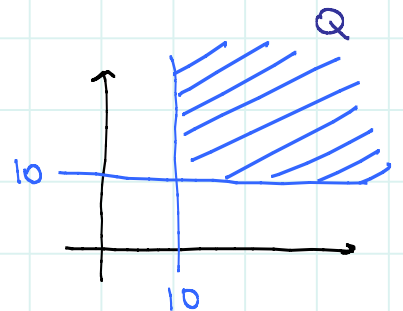
$$\geq \int_{10}^{\infty} dx \int_0^1 dy \frac{\log(x^2)}{x^{10}}$$



e questo converge :)

$$\iint_{Q_1 \text{ new}} \dots \geq \int_{10}^{\infty} dx \int_0^1 \frac{\log(x^2)}{x} dy \text{ e questo diverge :}$$

$$\iint_Q \dots \leq \iint_Q \frac{\log(x^2 + y^2)}{10^8}$$



Nessuna di queste scelte va bene

[Pensiamoci per la prossima volta]