

Esercizio 1 $B =$ palla in $\mathbb{R}^3$ con centro nell'origine e raggio 5

$$\iiint_B \frac{x y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^a} dx dy dz$$

Per quali a converge?

Se converge, il suo valore è 0 (è dispari rispetto a x)

Brutal mode: $\sim \frac{\rho^3}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-3}}$ quindi converge $\Leftrightarrow 2a-3 < 3$
 $\Leftrightarrow a < 3$

dim=3

Rigoroso: passo in sfere dei geografi

Dovrei spezzare a seconda del segno di x

$$\int_0^5 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{\rho^3 \cos^3 \varphi |\cos \theta| \sin^2 \theta}{\rho^{2a}} \rho^2 \cos^2 \varphi$$

$$= \int_0^5 \rho d\rho \frac{1}{\rho^{2a-5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \text{ roba trigonometrica}}_{\text{Numero positivo e ci si riduce all'integrale solo in } \rho}$$

Numero positivo e ci si riduce all'integrale solo in ρ

$$2a-5 < 6 \leadsto a < 3$$

Esercizio 2 $\iiint_C \frac{x y^3}{x^2 + y^4 + |z|^a} dx dy dz$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$$

Ci aspettiamo convergenza per a grandi

$$x = u^{2a}$$

$$y = v^a$$

$$z = w^4$$

$$\begin{pmatrix} 2a u^{2a-1} & 0 & 0 \\ 0 & a v^{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 4w^3 \end{pmatrix}$$

$$J = 8a^2 u^{2a-1} v^{a-1} w^3$$

$$\iiint_C \frac{x y^3}{x^2 + y^4 + z^a} dx dy dz = \iiint_D \frac{u^{2a} v^{3a}}{u^{4a} + v^{4a} + z^{4a}} 8a^2 u^{2a-1} v^{a-1} w^3 du dv dw$$

↑
esterno di un televisore strano

Ai fini della convergenza posso sostituire D che non contenga una palla centrata nell'origine

Brutale: $\frac{\rho^{2a+3a+2a-1+a-1+3}}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{-1-4a}}$

Servirebbe $-1-4a > 3$, il che è impossibile per a positivo.

Esercizio 3 $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\iint_Q \frac{1}{1+x^2 y^3} dx dy$$

NO! Questo ha senso
SOLO lontano dagli
assi

Unico problema è all'infinito

Brutale:

$$\sim \frac{1}{p^5} \leadsto \text{converge}$$

Su Q_2 non ci sono problemi (è proprio)

$$\begin{aligned} \iint_{Q_1} \frac{1}{1+x^2 y^3} dx dy &\leq \iint_{Q_1} \frac{1}{x^2 y^3} dx dy \\ &= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{convergenza per analisi 1}} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^3}}_{\text{convergenza per analisi 1}} = \text{Numero} \end{aligned}$$



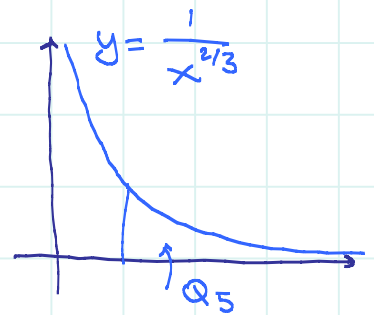
$$\begin{aligned}
\iint_{Q_3} \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy &= \int_{-1}^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{1+x^2y^3} \\
&= \int_0^1 dy \int_{-1}^{+\infty} dx \frac{1}{1+x^2y^3} \\
&= \int_0^1 dy \left[\frac{1}{y^{3/2}} \arctan(y^{3/2}x) \right]_{x=-1}^{x=+\infty} \\
&= \int_0^1 dy \left\{ \frac{1}{y^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(y^{3/2}) \right) \right\} = +\infty \\
&\sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{y^{3/2}} \quad \frac{3}{2} > 1, \text{ quindi diverge}
\end{aligned}$$

2° modo $x^2y^3 \leq 1 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{x^{2/3}}$

$$\iint_Q \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy \geq \iint_{Q_5} \frac{1}{2} dx dy$$

↑
zona + piccola

$x^2y^2 \leq 1$
in Q_5

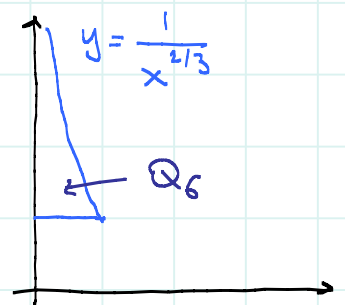


$$= \frac{1}{2} \text{Area}(Q_5) = +\infty \text{ perché } \frac{2}{3} < 1$$

Per esercizio lo studiamo su Q_4

Con lo stesso discorso di prima avremmo

$$\iint_{Q_4} \frac{1}{1+x^2y^3} dx dy \geq \iint_{Q_6} \frac{1}{2} dx dy$$



$$= \frac{1}{2} \text{Area}(Q_6) \text{ e questa converge } \ddot{\smile}$$

e per ora non posso concludere nulla

Proviamo usando la primitiva:

$$\iint_{Q_4} \dots = \int_{-1}^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{1+x^2y^3} = \int_{-1}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{y^{3/2}} \arctan(y^{3/2}x) \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \int_1^{+\infty} dy \frac{\arctan(y^{3/2})}{y^{3/2}} \quad \text{e questo converge perché è del tipo } \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{y^{3/2}} \text{ quando } y \rightarrow +\infty$$

Volendo non fare la primitiva, bisognerebbe trovare un modo diverso di dividere in + zone

Quali esponenti al posto del 3 garantiscono convergenza in $\mathbb{Q}_4$?
Tutti quelli > 2 .

Stesso discorso con la primitiva
— 0 — 0 —