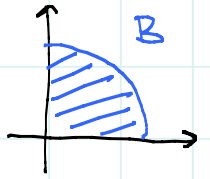


Esercizio 1 $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$



$$\iint_B \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} dx dy$$

Studiare conv. al variare di $a > 0$

Brutale: $f(x, y) \sim \frac{p}{p^{2a}} = \frac{1}{p^{2a-1}}$ conv. $\Leftrightarrow 2a-1 < 2 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$

Rigoroso: ci sono 2 casi da fare

$$\boxed{a < \frac{3}{2}} \quad 0 \leq \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} \leq \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} = \frac{p \cos \theta}{p^{2a}} \leq \frac{1}{p^{2a-1}}$$

$\uparrow$
 Den
 + piccolo

L'ultimo converge, quindi per confronto abbiamo convergenza

$$\boxed{a \geq \frac{3}{2}} \quad \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} \geq \frac{1}{2^a} \frac{x}{(x^2 + y^2)^a}$$

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{x}{(x^2 + y^2)^a} dx dy &= \int_0^1 dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\cos \theta}{p^{2a-1}} p \\ &= \int_0^1 \frac{1}{p^{2a-2}} dp \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta}_1 = \int_0^1 \frac{1}{p^{2a-2}} dp \end{aligned}$$

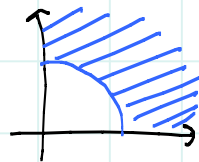
$\downarrow$
 Diverge se $2a-2 \geq 1$
 cioè $2a \geq 3$

In alternativa (più flessibile)

$$\int_0^1 \frac{1}{p^{2a-2}} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \geq \int_0^1 \frac{1}{p^{2a-2}} dp \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta}_{\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (tra } 0 \text{ e } \frac{\pi}{4})}}^{\geq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \geq \text{Numero} \cdot \int_0^1 \frac{1}{p^{2a-2}} dp$$

Esercizio 2

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$$



$$\iint_C \frac{x^a}{x^2 + y^6} dx dy$$

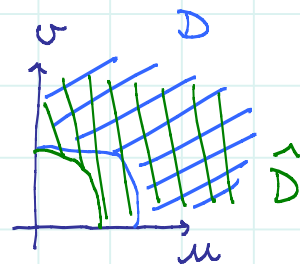
Studiare al variare di $a > 0$. [Non è chiaro come si comporta il denominatore]

1° modo Paraggio gli esponenti. Faccio un cambio di variabili
 $x = u^3$ $y = v$

$$\iint_C \frac{x^a}{x^2 + y^6} dx dy = \iint_D \frac{u^{3a}}{u^6 + v^6} 3u^2 du dv$$

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = |\text{Det}| = 3u^2$$

$$\begin{array}{lll} \text{Chi è } D? & x \geq 0 & y \geq 0 & x^2 + y^2 \geq 1 \\ & u \geq 0 & v \geq 0 & u^6 + v^6 \geq 1 \end{array}$$



Posso sostituire D con $\hat{D}$ dove la condizione è $u^2 + v^2 \geq 1$
perché dal punto di vista della convergenza non cambia nulla
Quindi non ci resta che studiare

$$\iint_{\substack{u^2 + v^2 \leq 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0}} \frac{u^{3a+2}}{u^6 + v^6} du dv$$

$$\text{Brutale: } \frac{\rho^{3a+2}}{\rho^6} = \frac{1}{\rho^{4-3a}}$$

$$\begin{aligned} \text{e quindi converge} &\Leftrightarrow 4 - 3a > 2 \\ &\Leftrightarrow a < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Rigorosamente passo in polari e trovo

$$\int_1^{+\infty} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\rho^{3a+2}}{\rho^6} \frac{(\cos\theta)^{3a+2}}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} \cdot \rho$$

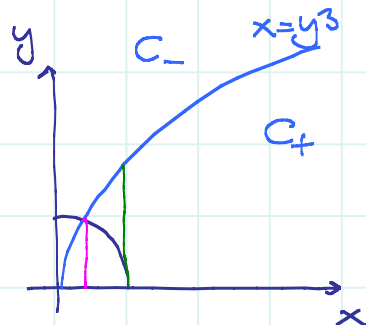
$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{3-3a}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\theta) d\theta$$

= Numero positivo perché è un integrale proprio per il solito discorso

2° modo Dividere le zone $\frac{x^a}{x^2+y^6}$

Chi comanda al denominatore?

$$x^2 \geq y^6 \Leftrightarrow x \geq y^3 \leadsto \text{zona } C_+$$



Studio separatamente le due zone

$$\begin{aligned} \iint_{C_+} \frac{x^a}{x^2+y^6} dx dy &\sim \iint_{C_+} \frac{x^a}{x^2} dx dy = \iint_{C_+} \frac{1}{x^{2-a}} dx dy \\ &\sim \int_1^{+\infty} dx \int_0^{\sqrt[3]{x}} dy \frac{1}{x^{2-a}} \\ &= \int_1^{+\infty} dx \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{2-a}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3-a}} \end{aligned}$$

$$\text{e questo converge } \Leftrightarrow \frac{5}{3} - a > 1 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \iint_{C_-} \frac{x^a}{x^2+y^6} dx dy &\sim \iint_{C_-} \frac{x^a}{y^6} \sim \int_1^{+\infty} dy \int_0^{y^3} dx \frac{x^a}{y^6} \\ &= \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{y^6} y^{3a+3} = \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{y^{3-3a}} \end{aligned}$$

$$\text{e questo converge } \Leftrightarrow 3-3a > 1 \Leftrightarrow a < \frac{2}{3}$$

Se voglio fare diventare rigorosi i due discorsi, devo scrivere delle disuguaglianze dove avevo messo $\sim$

$a < \frac{2}{3}$ Su C_+ scrivo $\frac{x^a}{x^2+y^6} \leq \frac{x^a}{x^2}$ e procedo come prima

$a \geq \frac{2}{3}$ Su C_+ scrivo $\frac{x^a}{x^2+y^6} \geq \frac{x^a}{x^2+x^2}$ e procedo come prima

$\uparrow$
 perché
 $x^2 \geq y^6$ in C_+
 — 0 — 0 —

Oss. La divisione in zone è utile quando al denominatore ci sono più termini con comportamento diverso

Esercizio 3 Studiare il limite all'infinito su $\mathbb{C}$ di

$$\frac{x^a}{x^2 + y^6}$$

Paragghiamo gli esponenti: $x = u^3$ $y = v$

$$\frac{u^{3a}}{u^6 + v^6}$$

Brutale: $\frac{p^{3a}}{p^6}$ quindi

→ per $a < 2$ il limite esiste e fa 0

→ per $a \geq 2$ il limite non esiste

Rigoroso: per $a < 2$ passo in polari e faccio le stime indipendenti da θ

Per $a \geq 2$ uso due omini

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^3, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{3a}}{t^6}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{se } a = 2 \\ +\infty & \text{se } a > 2 \end{cases}$$

— 0 — 0 —