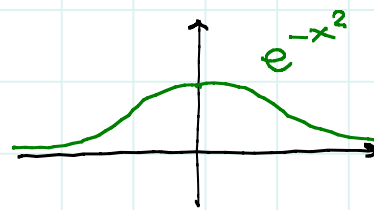


INTEGRALE GAUSSIANO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$



Problema: non sappiamo scrivere la primitiva usando le funzioni elementari.

Brutal mode

Passo in $\mathbb{R}^2$ e provo a calcolare

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Lo calcolo in due modi

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cartesiano}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-x^2-y^2} dx dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_I$$

$$= I^2$$

$\uparrow$
integrale di Analisi 1
che vorremmo fare

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{polari}}}{=} \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pag. 5}}}{p} = 2\pi \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp$$

$$= \pi \left[-e^{-p^2} \right]_0^{+\infty} = \pi$$

Dovendo essere uguali ... $I^2 = \pi$, da cui $I = \sqrt{\pi}$

— o — o —

OLTRE LA LINEA DI CONFINE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \quad \text{con } a > 0$$

Si può ripetere il procedimento, oppure pone $\sqrt{a}x = z$ quindi
 $\sqrt{a}dx = dz \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{a}} dz$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi}$$

Mettendo $a = i$ ☺

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

" $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}}$

Calcolando $\sqrt{i}$ e uguagliando parte reale e immaginaria si ottengono i valori dei due integrali
— 0 — 0 —

Integrale Gaussiano più rigorosamente

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{invasione} \\ \text{con quadrati}}} \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R dy e^{-x^2-y^2}$$

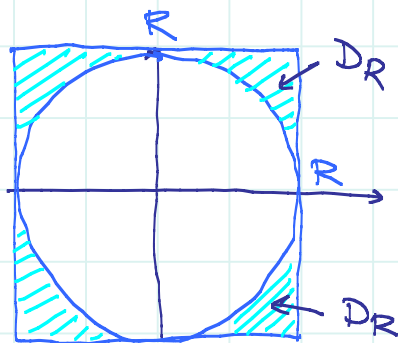
$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = I^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \lim_{\substack{\uparrow \\ \text{invasione} \\ \text{con i cerchi}}} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta e^{-\rho^2} \cdot \rho$$

$$= 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \rho e^{-\rho^2} = \pi \quad \text{perché si calcola}$$

Perché l'invasione con cerchi o quadrati produce lo stesso risultato?

A R fisso la differenza tra i due è l'integrale nella zona D_R e

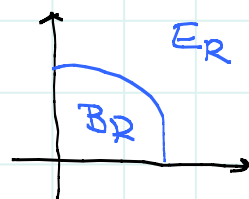


$$0 \leq \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \underbrace{e^{-R^2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{max della} \\ \text{funzione su} \\ D_R}} \cdot \underbrace{(4R^2 - \pi R^2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Area } D_R}} \rightarrow 0$$

Quindi per i carabiniere la differenza tende a 0.

Esempio 1

$$\iint_{B_R} \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy \quad \iint_{E_R} \frac{xy^2}{x^6+y^6} dx dy$$



Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{p^3}{p^6} = \frac{1}{p^3}$

Quindi il 1° diverge e il 2° converge

Rigorous: in polari $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\rho^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{\rho^6 (\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)}$

Integro direttamente

$$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \left[\frac{1}{\rho^3} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} \right] \rho$$

$$= \int_0^R \frac{1}{\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^6 \theta + \sin^6 \theta} d\theta$$

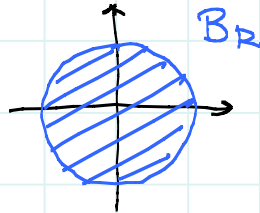
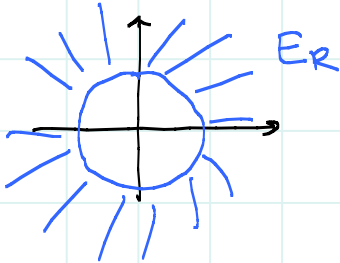
= Numero $\int_0^R \frac{1}{\rho^2} d\rho = +\infty$
posit.

Numero
(integrale PROPRIO di Analisi 1)
 $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta \geq m > 0$ per il solito discorso

Discorso analogo per $\int_R^{+\infty}$, che questa volta converge.

Esempio 1 bis Stessa funzione di sopra

$$\iint_{E_R} f(x,y) dx dy = 0 \text{ perché } f \text{ è dispari nella variabile } x \text{ e } \Omega \text{ insieme è simmetrico risp. all'asse } y$$



$$\iint_{B_R} f(x,y) dx dy \text{ è indeterminato perché a dx diverge a } +\infty \text{ e a sx diverge a } -\infty \text{ e non si può compensare anche se la funzione è dispari.}$$

Potei mettere un buco leggermente asimmetrico in modo che il limite venga 2023.

Esempio 2 $\iint_{B_R} \frac{xy}{x^3+y^3+x^6+y^6} dx dy$ $\iint_{E_R}$ stessa cosa

Con B_R ed E_R come nell'esempio 1.

Brutal mode: per il problema in 0 si ha $f \sim \frac{\rho^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^1} \overset{1 < 2}{\leadsto} \text{converge}$

per il problema a $+\infty$ $f \sim \frac{\rho^2}{\rho^6} = \frac{1}{\rho^4} \overset{4 > 2}{\leadsto} \text{converge}$

Rigorous Non ci sono problemi di segno.

$$\text{Su } B_R \quad 0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy}{x^3+y^3} = \frac{1}{\rho} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\underbrace{\cos^3\theta + \sin^3\theta}_{\geq m > 0 \text{ solito discorso}}} \leq \frac{1}{\rho} \frac{1}{m}$$

ora posso integrare

Su $\mathbb{R}^2$

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{xy}{x^6+y^6} = \frac{1}{\rho^4} \frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^6\theta + \sin^6\theta} \leq \frac{1}{\rho^4} \frac{1}{m}$$

e si conclude integrando,

Esempio 3 $\iint_Q \frac{\sin(xy)}{x^3+y^3} dx dy$

$\uparrow$
1° quadrante

Due problemi: origine e $+\infty$
Inoltre il segno è variabile.

Brutal mode: $\rightarrow$ per il problema a $+\infty$

$$0 \leq |f(x,y)| \sim \frac{1}{\rho^3} \quad \overset{3>2}{\rightsquigarrow} \text{ converge} \quad \left[\leq \frac{1}{m\rho^3} \right]$$

$\rightarrow$ per il problema in 0 (N.B.: vicino a 0 il segno è +)

$$0 \leq f(x,y) \sim \frac{xy}{x^3+y^3} \sim \frac{1}{\rho} \quad \overset{1<2}{\rightsquigarrow} \text{ converge} \quad \left[\leq \frac{1}{m\rho} \right]$$

— 0 — 0 —