

INTEGRALI IMPROPRI

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

$$\iiint_A f(x,y,z) dx dy dz$$

L'int. si dice improprio se succede ALMENO una di queste cose

→ l'insieme A è NON limitato

→ la funzione f è NON limitata in A .

Possuno succedere entrambe.

Un integrale improprio si dice MONOPROBLEMA se ha un problema solo, cioè

→ f è limitata in A , ma A non è limitato (diciamo che ha un problema all'infinito)

→ A è limitato, ma f è non limitata nell'intorno di un singolo punto di A (diciamo che c'è un problema in quel p.to).

Analisi 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

↑
problema in 0

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

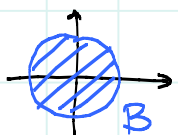
↑
problema all' ∞

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_0^{57} \dots + \int_{57}^{+\infty} \dots$$

↑
problema sia in 0
sia all'infinito

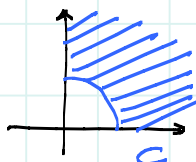
Analisi 2

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^4} dx dy$$



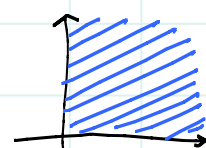
↑
problema
nell'origine

$$\iint_C \frac{1}{x^5+y^6} dx dy$$



↑
problema
all'infinito

$$\iint_Q \frac{1}{x+y} dx dy$$

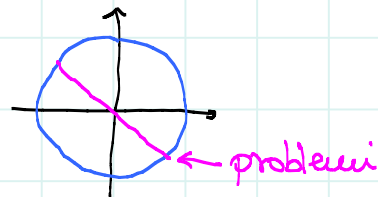


↑
doppio plau
si sposta

Idea: gli integrali con più problemi si cercano di spezzare in integrali con un problema solo.

Oss. Se facciamo $\iint_B \frac{1}{x+y} dx dy$ con B come sopra,

il problema è in tutto un segmento



Problema unico all'infinito

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ NON limitata

$A \subseteq \mathbb{R}^3$

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA sui limitati

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{A \cap B(0,R)} f(x,y) dx dy$$

↑
palla di raggio R

A R fisso l'integrale è PROPRIO perché f è limitata

Problema unico nell'origine

$A \subseteq \mathbb{R}^2$ è LIMITATO

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ NON limitata

negli intorni di $(0,0)$, ma

limitata altrove

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A \setminus B(0,\varepsilon)} f(x,y) dx dy$$

Queste due definizioni valgono solo se f ha un segno, diciamo $f(x,y) \geq 0$ in A (o per lo meno vicino al problema).

Se f non ha un segno si pone

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_{A^+} f(x,y) dx dy + \iint_{A^-} f(x,y) dx dy$$

↑
zona dove $f \geq 0$

↑
zona dove $f \leq 0$

Il primo pezzo può convergere oppure divergere a $+\infty$

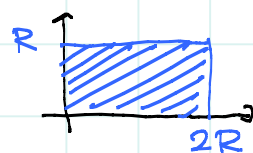
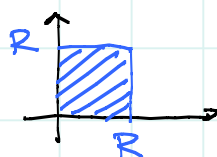
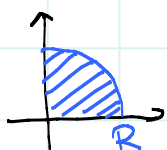
"secondo" " " " " " " " " $-\infty$

Se i due pezzi fanno $+\infty$ e $-\infty$, allora l'integrale globale si dichiara **INDETERMINATO**.

Ragione euristica Supponiamo di voler integrare sul primo quadrante. Ci sono tante possibilità

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B_R} f(x,y) dx dy$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} f(x,y) dx dy$$

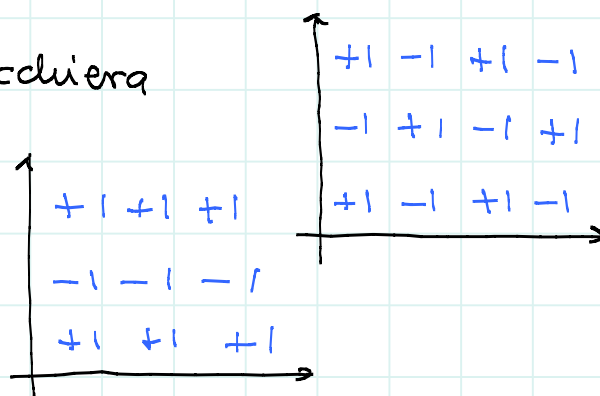


Il risultato finale non dipende da come "ho invaso" il primo quadrante nel caso in cui f ha un segno.

Nel caso in cui i due pezzi su A_+ e A_- fanno $\pm \infty$, il risultato dipende dal tipo di invasione.

Esempio classico Prendiamo f a scacchiera o anche a bande discontinue

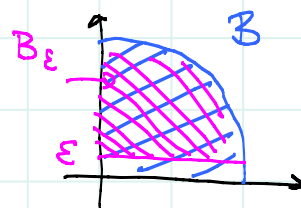
In questi casi a seconda di come invado ottengo risultati diversi.



Oss. Se il problema è su un intero segmento, basta "scavare un buco" intorno al problema

$$\iint_B \frac{e^y}{y(x+3)} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_\varepsilon} \dots dx dy$$

↑
problema su
asse x



CASI MODELLO

Analisi 1

$$\int_0^R \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_R^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$

Analisi 2

$$\iint_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \text{converge se } a < 2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 2 \end{cases}$$

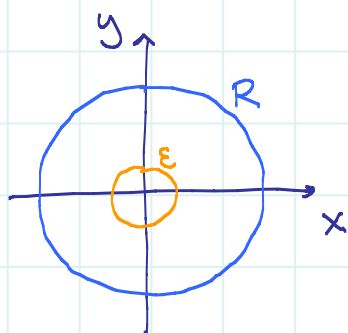
$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \text{converge se } a > 2 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 2 \end{cases}$$

Discorso analogo vale in $\mathbb{R}^3$ con soglia 3.

Dim

$$\iint_{B_R} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{B_R \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{(\dots)^a} dx dy$$

def. di Analisi 2



$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^a} \cdot p$$

coord. polari

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

$$= 2\pi \int_0^R \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

def. Analisi 1

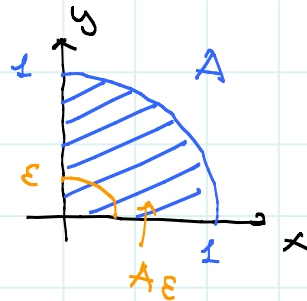
e questo converge se
e solo se $a-1 < 1$
cioè $a < 2$

La dimostrazione del caso $a < +\infty$ è del tutto analoga.
Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$ dove si paga $p^2 \cos \varphi$ latitudinarie

Esempio

$$\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$$

Problema unico nell'origine



$$\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{A_\epsilon} \frac{1}{x+y} dx dy$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\rho(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1-\epsilon) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta$$

= volendo si fa (int. proprio)

Si poteva dire da subito che converge perché è del tipo $\frac{1}{\rho}$
quindi con esponente minore di 2
— 0 — 0 —