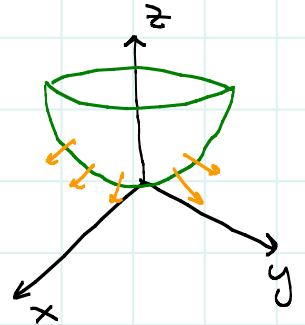


QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE IL FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1 \}$$

orientazione verso il basso



$$E = (x + y^2, y + xz, -2z + x)$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

1° modo Uso la definizione

Parametrizzo S

$$\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

$$\text{con } (u, v) \in \Omega = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

Vedo se $\Phi_u \wedge \Phi_v$ è quello giusto

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-2u, -2v, 1) = (M_1, M_2, M_3)$$

è nel verso sbagliato, quindi dovrò cambiare tutti i segni

Per definizione

conversione del segno

$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = - \iint_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

$$= - \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \left\{ \overset{x+y^2}{(u+v^2)} \overset{M_1}{(-2u)} + \overset{y+xz}{(v+u(u^2+v^2))} \overset{M_2}{(-2v)} + \overset{-2z+x}{(-2(u^2+v^2)+u)} \cdot 1 \right\} du dv$$

$$= \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} \{ 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 + 2v^2 \} du dv = \text{banale} = 2\pi$$

(gli altri termini se ne vanno per simmetria)

Commenti: $\rightarrow$ funziona sempre
 $\rightarrow$ talvolta conduce a calcoli complicati

2° modo Aggiungo il tappo e uso il teorema della divergenza

Sia V tutta la ciotola. Allora

$$\iiint_V \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \langle E, n \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$ normale esterna a V
 $\uparrow$ tutto il bordo di V

$$= \underbrace{\int_S \langle E, n \rangle \, d\sigma}_{\text{quello che voglio}} + \int_{\text{Base sopra}} \langle E, n \rangle \, d\sigma$$

$\downarrow$ verso l'alto

Quindi $\int_S \langle E, n \rangle \, d\sigma = - \int_{\text{Base sopra}} \langle E, (0, 0, 1) \rangle \, d\sigma$

$$= - \int_{\text{Base sopra}} (-2z + x) \, d\sigma = + \int_{\text{Base sopra}} (2 - x) \, d\sigma$$

$\downarrow$ 0 per simmetria

$$= 2 \text{ Area} = 2\pi \quad \ddot{\smile}$$

Commenti: $\rightarrow$ funziona sempre
 $\rightarrow$ si tratta solo di capire i tappi e aggiustare le orientazioni

3° modo Stokes con inversione del rotore.

Osservo che $\operatorname{div} E = 0$, quindi $E = \operatorname{rot} F$ per un certo F .
 Ora trovo F al solito modo. $F = (A, B, C)$

$$C_y - B_z = x + y^2$$

$$A_z - C_x = y + xz$$

$$B_x - A_y = -2z + x$$

Mettiamo $A \equiv 0$

$$-C_x = y + xz$$

$$C = -xy - \frac{1}{2} x^2 z$$

$$B_x = -2z + x$$

$$B = -2xz + \frac{1}{2} x^2 + \psi(y, z)$$

Sostituisco nella prima equazione e trovo

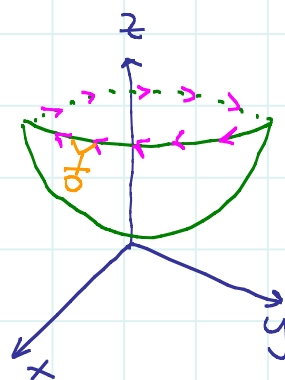
$$C_y - B_z = -\cancel{x} + \cancel{2x} - \psi_z(x, z) = \cancel{x} + y^2 \leadsto \psi(x, z) = -zy^2$$

Conclusione $(A, B, C) = (0, -2xz + \frac{1}{2} x^2 - zy^2, -xy - \frac{1}{2} x^2 z)$

[Qui farei una verifica calcolando il rotore]

Ora applico Stokes, ma prima devo orientare ∂S

L'orientazione è come in figura.



$$\int_S \langle \text{rot } F, n \rangle d\sigma = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

Parametrizzo γ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \underset{\substack{\uparrow \\ z=1}}{1})$ con verso da cambiare

$$\underbrace{\int_S \langle \text{rot } F, n \rangle d\sigma}_{\text{quello che voglio}} = - \int_0^{2\pi} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{0} + \left(\underset{\substack{\uparrow \\ -2xz}}{-2\cos t} + \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}x^2}}{\frac{1}{2}\cos^2 t} - \underset{\substack{\uparrow \\ -zy}}{\sin^2 t} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\cos t} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{0} \right\} dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left(-2\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^3 t - \sin^2 t \cos t \right) dt = +2\pi$$

per invertire il verso

Commenti : $\rightarrow$ funziona solo se $\text{div } E = 0$

$\rightarrow$ richiede di invertire il rotore (pensare bene quale componente mettere = 0)

4° modo Stokes con cambio di superficie

Osservo che $\text{div} E = 0$, quindi essendo su $\mathbb{R}^3$, $E = \text{rot} F$

Quindi

$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle ds$$

Ora cerco una nuova superficie S_1 tale $\partial S = \partial S_1$, orientazione compresa. Ma allora in tal caso

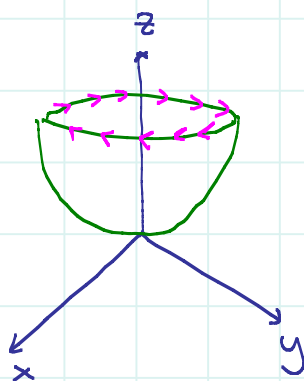
$$\int_S \langle E, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle F, \tau \rangle ds = \int_{\substack{\partial S_1 \\ \partial S = \partial S_1}} \langle F, \tau \rangle ds = \int_{S_1} \langle E, n \rangle d\sigma$$

Morale: invece di calcolare quello che era richiesto, calcolo

$$\int_{S_1} \langle E, n \rangle d\sigma \quad \text{purché } \partial S_1 = \partial S$$

Come S_1 uso il tappo con normale $(0, 0, -1)$ e quindi

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \langle E, (0, 0, -1) \rangle d\sigma &= \int_{S_1} (+2z^{\frac{1}{2}} - x) d\sigma \\ &\quad \uparrow \text{se ne va per simmetria} \\ &= 2 \text{Area} = 2\pi \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$



Commenti :

- funziona solo se E è un rotore, cioè $\text{div} E = 0$
- non richiede di invertire il rotore
- c'è libertà nel trovare S_1 , ma occhio all'orientazione.

— o — o —