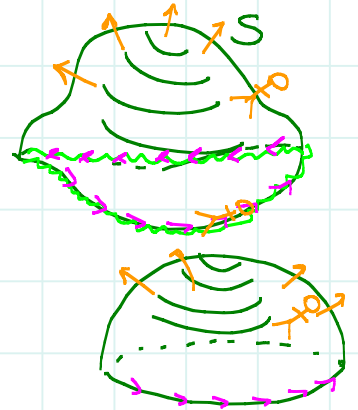


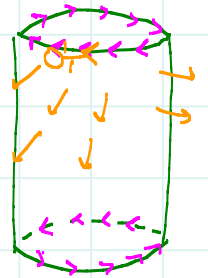
Orientazione del bordo di una superficie

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientata (cioè ho scelto tra le 2 possibili una versione coerente del versore normale).
Sia ∂S il bordo della superficie.

Il verso di percorrenza su ∂S indotto dall'orientazione di S è quello di un ormino, in piedi nel verso dato dall'orientazione di S , che percorre ∂S lasciando S a sinistra.



Esempio Cilindro con orientazione verso l'esterno
Come è orientato il bordo?



Fatto generale Sia $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametr. della superficie

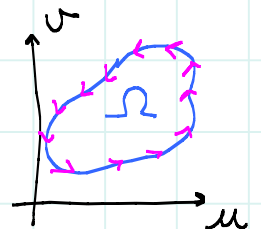
$$\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

Supponiamo che l'orient. di S sia data da $\phi_u \wedge \phi_v$

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra.

Allora $\phi \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

percorre ∂S con l'orientazione corretta.



Esempio Torniamo al cilindro che parametrizziamo come
 $(\cos \theta, \sin \theta, v) \quad (\theta, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1] = \Omega$

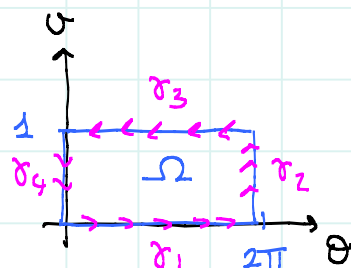
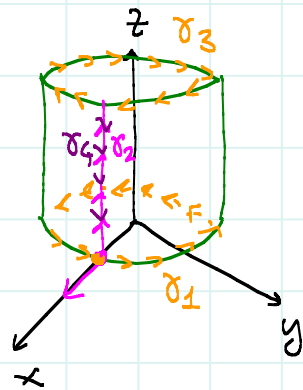
Orientazione del cilindro "canonica"

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

Se prendo $\theta = v = 0$ viene $(1, 0, 0)$

e il pto corrispondente è $(1, 0, 0)$

Questa è la normale esterna al cilindro.



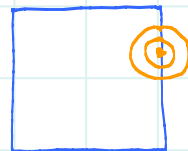
Oss. Occhio al diverso significato della parola "bordo" e del simbolo ∂ .

Quando si dice $\partial\Omega$ si intende il

"bordo topologico", cioè l'insieme dei pti

$x \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\forall r > 0 \quad B(x, r)$ interseca sia Ω sia il suo complementare

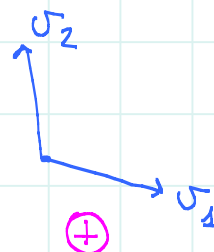
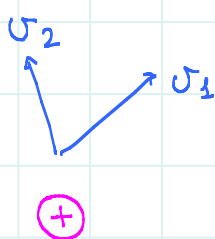
In questo se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una superficie, questa è tutta bordo nel senso topologico della parola



Quindi quando parliamo di ∂S va inteso (almeno qui) in maniera intuitiva.

Oss. Rigorosamente si definisce l'orientazione di una base di $\mathbb{R}^3$ o in generale di $\mathbb{R}^n$.

Le basi positive sono quelle che si ottengono dalla base canonica con una matrice di cambio base che ha $\det > 0$.



FORMULA DI STOKES

AKA

TEOREMA DEL ROTORE

Ingredienti : $\rightarrow$ campo di vettori $E = (A, B, C)$ } abbastanza regolari
 $\rightarrow$ superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$
 $\rightarrow$ orientazione di S

Flusso di $\text{rot } E$ attraverso S

integrale curvilineo

$$\int_S \langle \text{rot } E, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle E, \tau \rangle ds = \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

int. superficiale

versore tangente a ∂S orientato come descritto precedentemente

curva o un insieme di curve che percorre ∂S nel verso giusto

Enunciato da fisici Il flusso di $\text{rot } E$ attraverso S è uguale alla circuitazione di E lungo ∂S .

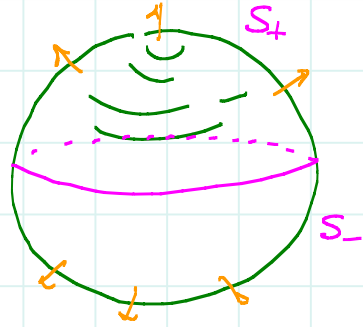
La seconda uguaglianza è sostanzialmente la relazione usuale tra integrali di forme diff. e integrali curvilinei di funzioni. Ci si riduce quindi a dimostrare l'uguaglianza tra il primo ed il terzo. La road map per dimostrarlo è la seguente

- $\rightarrow$ Calcolo $\text{rot } E$
- $\rightarrow$ Parametrizzo S in modo che n sia coerente con $\phi_u \wedge \phi_v$
- $\rightarrow$ Scrivo il primo integrale usando la definizione, riducendolo ad un integrale doppio su Ω .
- $\rightarrow$ Parametrizzo $\partial \Omega$ lasciandolo a sinistra e mi ritrovo gratis una parametrizzazione di ∂S
- $\rightarrow$ Riduco $\int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$ ad un integrale su $\partial \Omega$.
- $\rightarrow$ Guardo cosa dovrei dimostrare in (u, v) e vedo che è il teorema della divergenza.

Oss. In particolare, se S non ha bordo, allora

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = 0$$

Questo volendo si vede "spezzando in due"



$$\int_{S_+} \langle \operatorname{rot} E, n \rangle dS = \int_{\partial S_+} \langle E, \tau \rangle dS$$

$$\int_{S_-} \langle \operatorname{rot} E, n \rangle dS = \int_{\partial S_-} \langle E, \tau \rangle dS$$

Ma le due orientazioni su ∂S_+ e ∂S_- sono opposte!

— o — o —