

Esempio 1 Consideriamo la curva

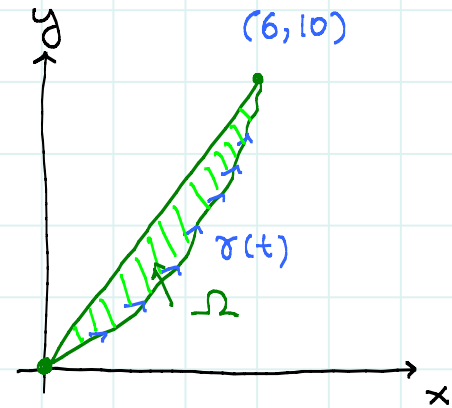
$$\gamma(t) = (t+t^2, t+t^3) \quad t \in [0, 2]$$

e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme limitato dal sostegno di γ e dal segmento dei suoi estremi.

Calcolare

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$$

Primo passo La curva è semplice e non chiusa (entrambe le componenti sono crescenti per $t \in [0, 2]$)



Secondo passo Cerco di capire se γ sta sopra/sotto la retta $y = \frac{5}{3}x$

Mi chiedo se sta sotto, cioè $y(t) \stackrel{?}{\leq} \frac{5}{3}x(t)$, cioè $3y(t) \stackrel{?}{\leq} 5x(t)$
 $3(t+t^3) \leq 5(t+t^2) \leadsto 3t+3t^3 \leq 5t+5t^2$

$$3t^3 - 5t^2 - 2t \stackrel{?}{\leq} 0 \quad t(3t^2 - 5t - 2) \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$t(t-2)(3t+1) \stackrel{?}{\leq} 0$$

+ - + $\leftarrow$ quando $t \in [0, 2]$

La curva interseca la retta per $t=0$, $t=2$ e $t=-\frac{1}{3}$

Fortunatamente $t=-\frac{1}{3}$ sta fuori dalla zona di definizione della curva

Calcolo l'integrale richiesto

Potei scrivere Ω come insieme normale rispetto all'asse x , ma non è per nulla facile.

Meglio: usare teo. divergenza

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx \, dy$$

$\uparrow$
 $E = (\frac{1}{2}x^2y, 0)$

$$= \int_{\gamma} A \, dy - \underbrace{B \, dx}_0$$

$\uparrow$
curve che
percorrono $\partial\Omega$
lasciandolo a sx

$$= \int_{\partial\text{data}} A \, dy + \int_{\text{segmento}} A \, dy$$

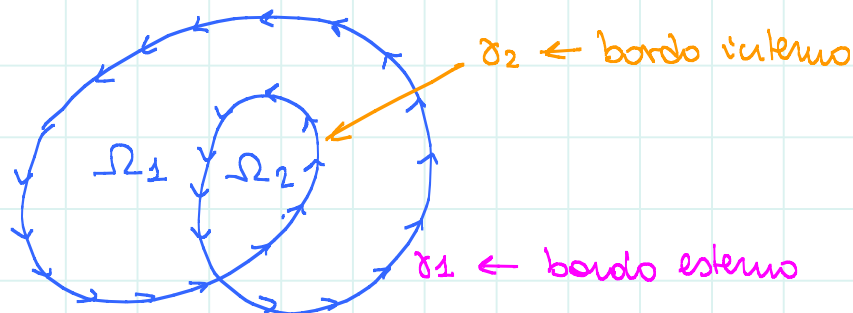
$$\int_{\partial\text{data}} A \, dy = \int_0^2 \frac{1}{2} \underbrace{(t+t^2)^2}_{x(t)^2} \underbrace{(t+t^3)}_{y(t)} \underbrace{(1+3t^2)}_{\dot{y}(t)} \, dt = \text{si fa}$$

segmento: $(3t, 5t)$ con $t \in [0, 2]$ ← orientazione al contrario

$$\int_{\text{segmento}} A \, dy = \text{---} \int_0^2 \frac{1}{2} \underbrace{(3t)^2}_{x(t)} \underbrace{(5t)}_{y(t)} \underbrace{5}_{\dot{y}(t)} \, dt = \text{si fa.}$$

$\uparrow$
orientazione

Esercizio 2



Quanto vale $\int_{\gamma} x \, dy$?

Osservo che $\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy$ se $\gamma \dots$

Nel nostro caso viene $2 \text{Area}(\Omega_2) + \text{Area}(\Omega_1)$

Esercizio 3 Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

Primo fatto La curva è chiusa (banale) e semplice

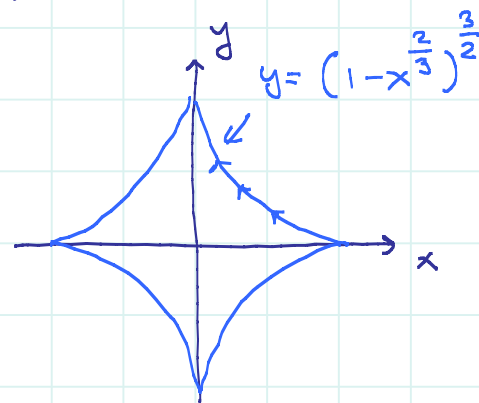
$$\begin{cases} \cos^3 t = \cos^3 s \\ \sin^3 t = \sin^3 s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \cos t = \cos s \\ \sin t = \sin s \end{cases} \rightsquigarrow t - s = 2k\pi$$

$\rightsquigarrow$ l'unica possibilità, se non sono uguali, è che siano gli estremi

Secondo fatto Disegno il sostegno

Sono i pti di

$$|x|^{\frac{2}{3}} + |y|^{\frac{2}{3}} = 1$$



Terzo fatto Calcolare area stella

1° modo Area = $4 \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$ = forse si fa

2° modo Area = $\int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cdot \cos t dt$
 $= 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \cdot \sin^2 t dt$ - si fa

3° modo Area = $-\int_{\gamma} y dx = + \int_0^{2\pi} \sin^3 t \cdot 3 \cos^2 t \cdot (-\sin t) dt$
 $= 3 \int_0^{2\pi} \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt$

Sommando le 2 relazioni

$$\begin{aligned} 2 \text{ Area} &= 3 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \text{si fa davvero} \end{aligned}$$

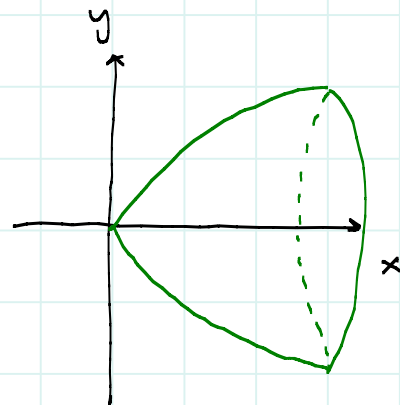
Esercizio 4 $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \sin x\}$

$V =$ ruoto F di 360° intorno all'asse x

$S =$ sup. laterale di V

Calcolare il flusso ^{USCENTE} attraverso S del campo

$$\vec{E} = (x, y^2, zx)$$



1° modo Parametrizzo S come sostegno di una superficie

$$\phi(u, \theta) = (u, \underbrace{\sin u \cos \theta, \sin u \sin \theta}_{\substack{\text{fissato } u=x, \text{ nelle} \\ \text{variabili } y \text{ e } z \text{ ho una} \\ \text{circonf. di raggio } \sin u}})$$

$u \in [0, \frac{\pi}{2}]$
 $\theta \in [0, 2\pi]$

vedo se $\phi_u \wedge \phi_\theta$ ha il verso giusto, poi uso la formula

2° modo Uso teo. della divergenza

$$\iiint_V \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \int_S \langle E, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{\text{cerchio}} \langle E, (1, 0, 0) \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$
orient. ok

$$\iiint_V \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (1 + \underbrace{2y + x}_0) \, dx \, dy \, dz = \text{si fa per sezioni}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x) \pi \sin^2 x \, dx = \text{si fa}$$

$\uparrow$
si scrive usando $\cos(2x)$ e poi
si fa per parti

$$\int_{\text{cerchio}} \langle E, (1, 0, 0) \rangle \, d\sigma = \int_{\text{cerchio}} x \, d\sigma = \frac{\pi}{2} \cdot \text{Area}(\text{cerchio}) = \frac{\pi^2}{2}$$

— 0 — 0 —