

Teorema divergenza $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle \, d\sigma$$

$\uparrow$
 normale
 esterna a Ω

$\nwarrow$ integrale superf.

Versione in dim 2 $E = (A, B)$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle E, n \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

$\uparrow$
 int. curvilinee

$\nwarrow$ curva, o unione di curve, che percorrono $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

Analisi 1 $E(b) - E(a) = \int_a^b E'(x) \, dx$ $E: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI AKA **GAUSS-GREEN**

Ingredienti :

- $\rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$
- $\rightarrow E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^3$
- $\rightarrow f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} E \, dx = \int_{\partial\Omega} f \langle E, n \rangle \, d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, E \rangle \, dx$$

Nel caso particolare in cui $E = \nabla g$ con $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diventa

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dx = \int_{\partial\Omega} f \langle \nabla g, n \rangle \, d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx$$

$\uparrow$
 Derivata direzionale
 di g in direzione normale a $\partial\Omega$

Analisi 1

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Banale Gauss - Green $\Rightarrow$ teo. divergenza

Basta prendere $f \equiv 1$ e osservare che $\nabla f \equiv 0$

Facile Teo. divergenza $\Rightarrow$ Gauss - Green

Scrivo il teo. della divergenza con fE al posto di E

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(fE) dx &= \int_{\partial\Omega} \langle fE, n \rangle d\sigma \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \langle \nabla f, E \rangle + f \operatorname{div} E \end{aligned}$$

$$\int_{\partial\Omega} f \langle E, n \rangle d\sigma$$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla f, E \rangle dx + \int_{\Omega} f \operatorname{div} E dx$$

Ora basta portare il primo integrale a destra

$$\begin{aligned} \text{Analisi 1} \quad [f(x)g(x)]_a^b &= \int_a^b [f(x)g(x)]' dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

Ora basta ri-organizzazione i termini.

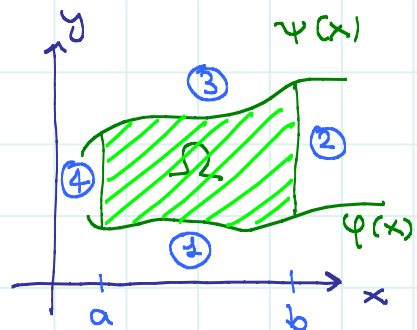
— 0 — 0 —

Ragionevole Dim. teo. della divergenza con $d=2$ e Ω insieme normale risp. asse x

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

Devo dimostrare che

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) dx dy = \int_{\partial\Omega} A dy - B dx$$



Dimostriamolo per la parte con B, cioè

$$\iint_{\Omega} By dx dy = \int_{\partial\Omega} -B dx$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} B_y(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dy B_y(x,y) \\ &= \int_a^b dx \{ B(x, \varphi(x)) - B(x, \psi(x)) \} \end{aligned}$$

$$\int_{\partial\Omega} -B dx = \int_{\gamma_1} -B dx + \int_{\gamma_2} -B dx + \int_{\gamma_3} B dx + \int_{\gamma_4} B dx$$

$\partial\Omega$ è fatto da 4 curve

- $\gamma_1(t) = (t, \psi(t))$ con $t \in [a, b]$
- $\gamma_2(t) = (b, t)$ con $t \in [\psi(b), \varphi(b)]$
- $\gamma_3(t) = (b, \varphi(t))$ con $t \in [a, b]$
- $\gamma_4(t) = (a, t)$ con $t \in [\psi(a), \varphi(a)]$

} orientate al contrario

Osservo che $\int_{\gamma_2} B dx = \int_{\gamma_4} B dx = 0$ perché $\dot{x}(t) = 0$ in questi casi

$$\int_{\gamma_1} -B dx = - \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{B(t, \psi(t))} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{1} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{dt}$$

$$\int_{\gamma_3} B dx = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{B(t, \varphi(t))} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{1} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{dt}$$

Mettendo insieme l'uguaglianza è verificata.

Dimostriamo ora la parte su A , cioè

$$\iint_{\Omega} A_x dx dy = \int_{\partial\Omega} A dy$$

L'idea non ovvia è di introdurre la funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, t) dt$$

Per questa scriviamo il teo. fondamentale del calcolo integrale

$$\underbrace{H(b)}_{(1)} - \underbrace{H(a)}_{(2)} = \int_a^b \underbrace{H'(x)}_{\text{(calcolo } H'(x) \text{ con le formule per gli integrali dip. da parametro)}}$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, t) dt + A(x, \psi(x)) \psi'(x) - A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \right\} dx$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, t) dt + \int_a^b A(x, \psi(x)) \psi'(x) dx - \int_a^b A(x, \varphi(x)) \varphi'(x) dx$$

(3) (4) (5)

Vediamo chi sono (1), (2), (3), (4), (5)

$$(3) = \iint_{\Omega} A_x(x, y) dx dy = \text{termine di } s_x \text{ nel teo. della div.}$$

$$\int_{\gamma_1} A dy = \int_a^b A(t, \varphi(t)) \varphi'(t) dt = - (5)$$

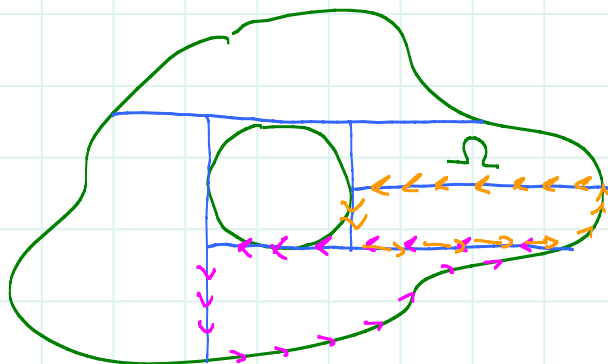
$$\int_{\gamma_2} A dy = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} \underbrace{A}_{\substack{\uparrow \\ x(t)}}(\underbrace{b}_{\substack{\uparrow \\ y(t)}}, \underbrace{t}_{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}) dt = H(b) = (1)$$

$$\int_{\gamma_3} A dy = \int_a^b A(t, \psi(t)) \psi'(t) dt = (4)$$

$$\int_{\gamma_a} A dy = \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} A(a, t) \cdot 1 dt = H(a) = \textcircled{2}$$

Mettendo insieme otteniamo quello che doveva venire.

Per nulla ovvio: passare dagli insiemi normali ad insiemi Ω qualunque.



Idea molto intuitiva (che non si riesce a formalizzare)

- dividere Ω in tanti pezzi creando "bordi aggiuntivi"
- applicare tes per insiemi normali in ogni pezzo
- osservare che i contributi dei bordi aggiuntivi si cancellano.

— o — o —