

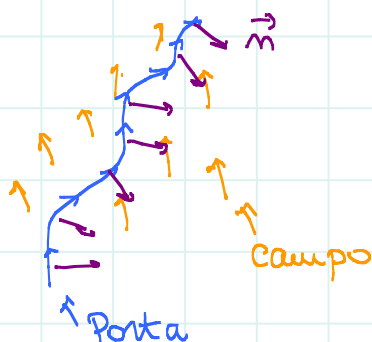
INTEGRALI DI FLUSSO

Dim $d = 2$ Ingredienti

- ① Campo $E(x, y) = (A(x, y), B(x, y))$ $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- ② Curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ suff. regolare
- ③ Orientazione: scelta di un vettore $\vec{n}$ normale a γ ($\perp$ a $\dot{\gamma}$)

Flusso di E attraverso γ in direzione $\vec{n}$

$$= \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$



Sostegno curva = porta oppure vela
 Campo = mov. di persone oppure vento

Integrale di flusso: bilancio entrate
 uscite, o forza
 esercitata dal vento su una faccia
 della vela

Vettore normale canonico (standard) = tangente alla curva
 ruotato di 90° orario

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$$

vettore tangente $\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)$$

Andando a sostituire

$$\begin{aligned}\text{Flusso} &= \int_{\gamma} \langle E, \vec{n} \rangle ds = \int_a^b \left\{ A \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right\} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\ &= \int_a^b \{ A \dot{y} - B \dot{x} \} dt \\ &= \int_{\gamma} -B dx + A dy\end{aligned}$$

In conclusione: se $E = (A, B)$ e $\vec{n}$ è il vettore normale canonico, allora

$$\text{Flusso} = \int_{\gamma} \langle E, n \rangle ds = \int_{\gamma} (-B dx + A dy)$$

↑
integrale di
funzione

↑
integrale di
forma differenziale

dim d=3 Ingredienti

→ Campo $\vec{E} = (A, B, C)$

→ Superficie $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$

→ Orientazione, cioè scelta di un vettore normale

$$\text{Flusso} = \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Vettore normale canonico: quello associato a $\Phi_u \wedge \Phi_v$,
che a suo tempo era (M_1, M_2, M_3)

$$\text{Flusso} = \int_S \left(A \cdot \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} + B \cdot \frac{M_2}{\sqrt{\cdot}} + C \cdot \frac{M_3}{\sqrt{\cdot}} \right) \sqrt{\cdot} du dv$$

Conclusione: se $\vec{n}$ è il vettore normale canonico, allora

$$\text{Flusso} = \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

$\uparrow$
 Ω
 $\uparrow$
 superficie.
 $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

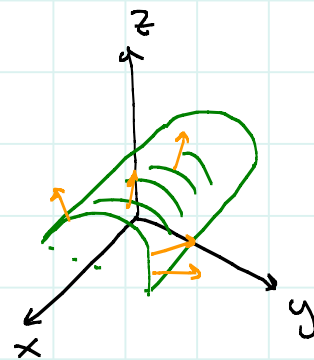
$\uparrow$
 $A(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) M_1(u,v)$

Esempio

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, x \in [-1, 1] \}$$

$$E = (xy, y, z^2)$$

$\vec{n}$ = verso l'alto



Primo passo: parametrizzo la superficie

$$(u, \underset{1}{\rho} \cos \theta, \underset{1}{\rho} \sin \theta) = (u, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$u \in [-1, 1], \theta \in [0, \pi]$$

Secondo passo: calcolo $\vec{n}$ canonico

	*	*	*	
Φ_u	1	0	0	$\rightsquigarrow (0, -\cos \theta, -\sin \theta)$
Φ_θ	0	$-\sin \theta$	$\cos \theta$	

Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ viene $(0, 0, -1)$

$\uparrow$
 verso il basso, quindi
 è l'opposto di quello
 che mi serve

Terzo passo: uso formula

$$\text{Flusso} = - \int_{-1}^1 du \int_0^\pi d\theta \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{u} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\cos \theta} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ M_1}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ y}}{\cos \theta} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ M_2}}{(-\cos \theta)} + \underset{\substack{\uparrow \\ z}}{\sin^2 \theta} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ M_3}}{(-\sin \theta)} \right\}$$

= si fa

— 0 — 0 —

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Stanno in dimensione $d=2$ oppure $d=3$ (ma vale per ogni d)

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d \text{ e } E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

normale ESTERNA

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

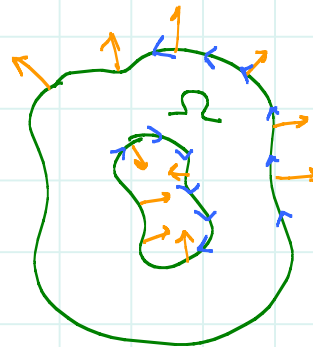
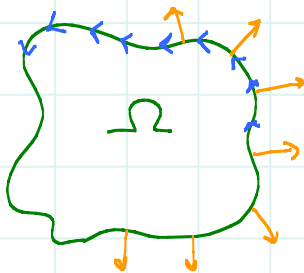
$d=2$

$$\iint_{\Omega} (A_x + B_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

integrale doppio

integrale curvilineo

γ è una curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

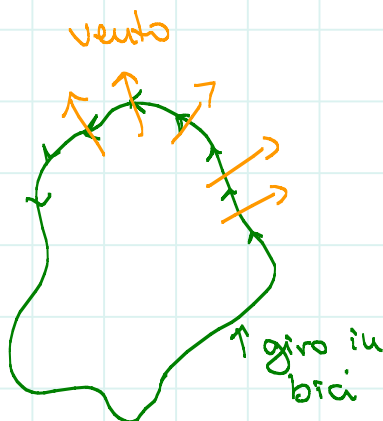


$d=3$

$$\iiint_{\Omega} (A_x + B_y + C_z) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

integrale superficiale

Interpretazione ciclistica



Faccio un giro in bici, in verso antiorario, e ho sempre il vento da sinistra. Quando torno a casa dico che la divergenza del vento è positiva da qualche, e il vento non è un rotore e il suo rotato di 90° non è un gradiente

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$$

$\underbrace{\int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds}_{> \text{sempre}}$
 $\downarrow$
 $\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} dx dy$

deve essere positiva da qualche parte.