

SUPERFICI Una superficie può presentarsi in almeno 3 modi

Cartesiana "Pezzo di grafico"

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y) \}$$

$\uparrow$ base

Implicita "Luogo di zeri"

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0 \}$$

Parametrica Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$\uparrow$
insieme dei parametri

$$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^d)$$

$$\phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \leftarrow \text{parametrizz. della superficie}$$

$$S = \{ \phi(u, v) : (u, v) \in \Omega \} \leftarrow \text{sostegno della superficie}$$

Oss. 1 Le superfici cartesiane sono casi speciali di parametriche

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

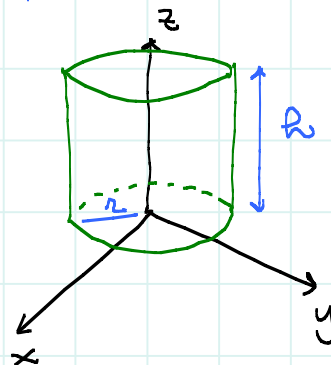
Oss. 2 Quando vale il teo. delle funzioni implicite, anche le superfici date in forma implicita si possono localmente parametrizzare.

Oss. 3 Sulla ϕ di solito si assume che sia continua, iniettiva nell'interno di Ω , di classe C^1 con matrice jacobiana abbia rango 2 in ogni p.to.

Esempio 1

$$C = \{ \underbrace{(r \cos u, r \sin u, v)}_{\phi(u,v)} : \underbrace{u \in [0, 2\pi], v \in [0, R]}_{\text{dove variano i parametri}} \}$$

Oss. La parametrizzazione è iniettiva all'interno del rettangolo, ma i due lati con $u=0$ e $u=2\pi$ vanno a coincidere.



Esempio 2

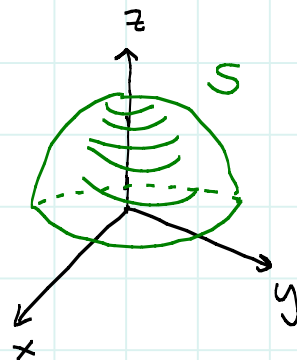
 Sfera di raggio r e centro nell'origine

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2, z \geq 0 \}$$

↑ descrizione implicita

$$= \{ (x, y, \underbrace{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}_{f(x,y)}) : \underbrace{x^2 + y^2 \leq r^2}_{\text{descrizione della base } \Omega} \}$$

↑ presentazione cartesiana



Sono possibili almeno due parametrizzazioni

$$\phi(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}) \quad (u, v) \in \Omega = \text{cerchio di raggio } r \text{ in } \mathbb{R}^2$$

$$\phi(u, v) = (r \cos v \cos u, r \cos v \sin u, r \sin v)$$

↑ long. ↑ latitud.

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Oss. Lo stesso insieme è parametrizzato in vari modi.

PIANO TANGENTE E VETTORE/VERSORE NORMALE

Caso cartesiano $(x, y, f(x, y))$

Il piano tangente ha equazione, nel p.to $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

↑
Tangente di ordine 1 di $f(x, y)$ nel p.to (x_0, y_0)

Dal piano tangente segue il vettore/versore normale.

Caso implicito $g(x, y, z) = 0$

In questo caso $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ è $\perp$ al luogo di zeri

↑
vettore normale
alla superficie

Se è diverso dal vettore nullo (proprio quando vale il teo. della funzione implicita) il piano tangente diventa

$$g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

↑ piano $\perp$ a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ che passa per (x_0, y_0, z_0)

Caso parametrico $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

Il piano tangente ha equazione parametrica

$$\Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0)$$

Descrizione parametrica del piano tangente, che ha senso se $\Phi_u(u_0, v_0)$ e $\Phi_v(u_0, v_0)$ sono due vettori lin. indip., il che accade se e solo se $J\Phi(u_0, v_0)$ ha rango = 2 ("full rank")

$$J\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \\ z_u(u,v) & z_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\phi_u(u,v)$ $\uparrow$ $\phi_v(u,v)$

Se voglio passare in forma cartesiana mi serve un vettore $\perp$ a ϕ_u e ϕ_v , che sarà normale alla superficie.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_u z_v - z_u y_v, z_v x_u - x_v z_u, x_u y_v - y_u x_v)$$

$$=: (M_1, M_2, M_3)$$

$$= \phi_u \wedge \phi_v$$

— o — o —

AREA DELLA SUP L'analogo del discorso

fatto per le curve sarebbe

- triangolare la superficie
- sommare le aree dei triangoli
- fare il sup infittendo la triangolazione



NON FUNZIONA! IL SUP VIENE QUASI SEMPRE $+\infty$

Il classico controesempio è la **LANTERNA DI SCHWARZ**

$\uparrow$ google

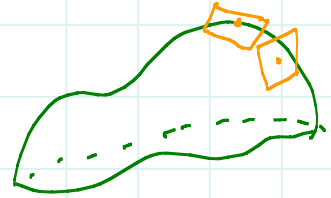
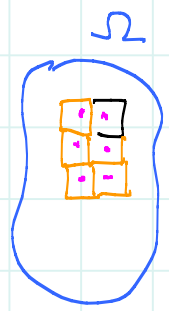
L'idea geometrica è che per effetto fisarmonica i triangoli non è detto che risultino "quasi tangenti" alla superficie, anche quando sono molto piccoli.

Con le curve non succedeva.

Cosa funziona

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Approssimo Ω con dei quadrati / rettangoli
- In ogni quadrato scelgo un pto e approssimo Φ con il suo Taylor di ordine 1
- Faccio l'immagine del quadrato mediante la Φ approssimata
- Ogni quadrato finisce in un parallelogrammo di cui so calcolare l'area
- Infittisco la quadrettatura e faccio il limite



Moralmente: approssimo la sup. con dei parallelogrammi contenuti nei piani tangenti
La sto "piastellando" con dei parallelogrammi tangenti

— o — o —