

LA SOLITA

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx - \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

ω è una forma diff. definita per $(x,y) \neq (0,0)$

Si verifica che ω è chiusa in tutto l'insieme di definizione

[Simpatico conto $A_y = B_x$]

Tuttavia ω non è esatta.

Dim Basta trovare una curva chiusa γ t.c. $\int_{\gamma} \omega \neq 0$

Prendiamo

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\sin t} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}}}{(-\sin t)} - \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{\cos t} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}}}{\cos t} \right\} dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} (\underbrace{\cos^2 t}_{=0} + \underbrace{\sin^2 t}_{=0}) dt = -2\pi$$

Interpretazione ciclistica Penso al vento come un campo di vettori.

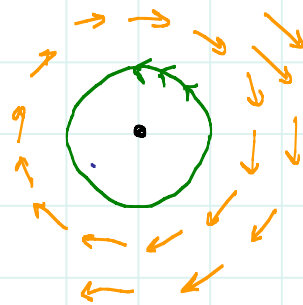
Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, posso concludere che il campo non è gradiente di un potenziale

Infatti: vento contrario vuol dire $\langle \vec{E}, \dot{\gamma} \rangle < 0$ per ogni γ ,
ma allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \dot{\gamma} \rangle ds < 0 \leadsto \text{NO esatta}$$

Come è fatta la solita?

$$\omega = \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{A(x,y)} dx - \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{B(x,y)} dy$$



È un vento vorticoso intorno all'origine

Fatto importante Se prendo l'insieme $x > 0$, questo è convesso, dunque sempl. connesso, dunque lì la forma è esatta, quindi esiste una primitiva

Basta prendere

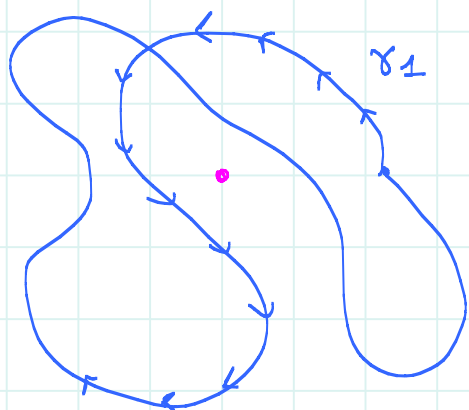
$$V(x,y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$V_x = -\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{e idem l'altra}$$

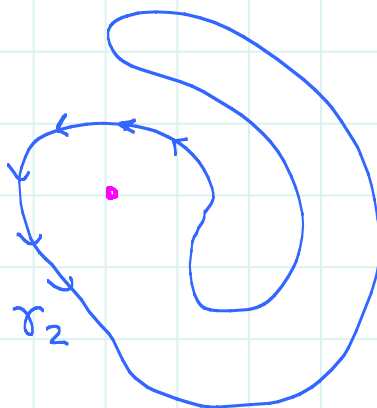
Stessa cosa in $x < 0, y > 0, y < 0$

Dirò di più: esiste una primitiva definita ovunque meno che sul semiasse negativo dell'ex (l'insieme è stellato, quindi sempl. connesso)

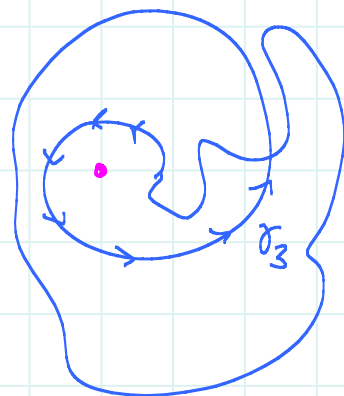
Esercizio: scrivere questa primitiva



$$\int_{\gamma_1} \omega = 0$$



$$\int_{\gamma_2} \omega = -2\pi$$



$$\int_{\gamma_3} \omega = -4\pi$$

Moralmente: conta solo quante volte gira intorno al buco.

Fatto Sia ω una qualunque forma diff. chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$.

Allora

$$\omega = \omega_1 + c \cdot \text{solita}$$

↑
forma esatta

— o — o —

Le strategie per calcolare $\int_{\gamma} \omega$

① Definizione bovina (uso la formula)

①bis) Uso la formula, ma magari parametrizzo la curva in modo più comodo.

② Spero che ω sia esatta, calcolo UNA primitiva, e faccio la diff. tra il valore agli estremi

③ Spero che ω sia chiusa, e sostituisco γ con una curva più comoda che sia omotopa alla γ data (questo funziona anche se ω è esatta e non chiede di calcolare la primitiva)

Esempi $\omega = x dx + y^2 dy$

Esatta! $V(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} y^3$ (e anche chiusa)

$$\omega = xy dx + y^2 x dy$$

$A_y = x$ $B_x = y^2$ ☹️ no chiusa, no esatta

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

$V(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) \rightsquigarrow$ esatta e chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \text{origine}$

Esempio Sia $\omega = (y+z)dx + xdy + (z^3+x)dz$
 $\gamma(t) = (t + \sin t, t \cos^2 t, t^3 + t) \quad t \in [0, \pi]$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \omega$$

Testiamo la chiusura

$$A_y = B_x$$

$$1 = 1 \quad \text{☺}$$

$$A_z = C_x$$

$$1 = 1 \quad \text{☺}$$

$$B_z = C_y$$

$$0 = 0 \quad \text{☺}$$

Quindi ω è chiusa. Essendo definita su $\mathbb{R}^3$, allora è esatta.

$$V(x, y, z) = xy + xz + \frac{1}{4} z^4$$

Ora basta calcolare gli estremi della curva e sostituire

In alternativa: uso strategia ③ sostituendo la curva con il segmento che ha gli stessi estremi, e poi uso la definizione senza calcolare la primitiva.

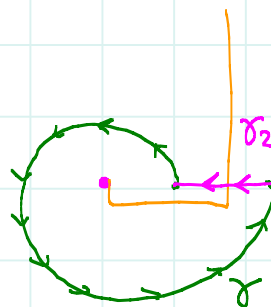
Esempio $\omega =$ la solita

$$\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t) \quad t \in [2\pi, 4\pi]$$

$$\int_{\gamma} \omega$$

Potei usare la definizione (auguri!)

In $\mathbb{R}^2 \setminus$ curva arancione esiste una primitiva (auguroni!)



Alternativa praticabile: torso al p.to di partenza con un segmento

Sappiamo che $\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = -2\pi$
 $\uparrow$
 l'unione fa un giro

quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= -2\pi - \int_{\gamma_2} \omega \\ &= -2\pi + \int_{2\pi}^{4\pi} (0+0) = -2\pi \end{aligned}$$

veggiamo 0 per merito di y e dy $\therefore$

segmento $\rightarrow\rightarrow\rightarrow \gamma(t) = (t, 0)$ con $t \in [2\pi, 4\pi]$

— o — o —