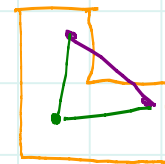
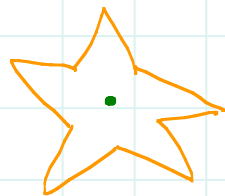


Insieme $\rightarrow$ connessi
 $\rightarrow$ connessi per archi
 $\rightarrow$ semplicemente connessi
 $\rightarrow$ convessi
 $\rightarrow$ stellati

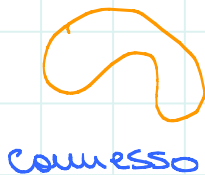
Non Def. Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice

- **CONVESSO** se per ogni P e Q in Ω , tutto il segmento di estremi P e Q è contenuto in Ω
- **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ tale che per ogni $Q \in \Omega$, tutto il segmento PQ è contenuto in Ω



[Stellato: posso piazzare un guardiano in P che vede tutto Ω]

- **CONNESSO** se è fatto da un "pezzo solo"

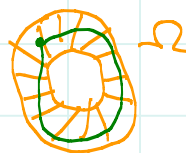


- **CONNESSO PER ARCHI** se per ogni P e Q in Ω esiste $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ **continua** t.c. $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$.

- **SEMPLICEMENTE CONNESSO** per $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ vuol dire che non ha buchi



sempl. connesso



NON sempl. connesso

In generale, se ogni curva chiusa la posso "ritirare" sul p.to di partenza / arrivo senza spezzarla.

Esempio In $\mathbb{R}^3$

- il complementare di una sfera è sempl. connesso
- il complementare di una retta NO
- il complementare di un disco SÌ
- il complementare di una circ. NO.

[Def.] Siano $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2: [a,b] \rightarrow \Omega$ due curve continue tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = P$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = Q$

Si dice che γ_1 e γ_2 sono **OMOTOPE** [se è possibile trasformare l'una nell'altra lasciando fissi estremi]

se esiste $\Phi: [a,b] \times [0,1] \rightarrow \Omega$ continua t.c.

$$\Phi(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

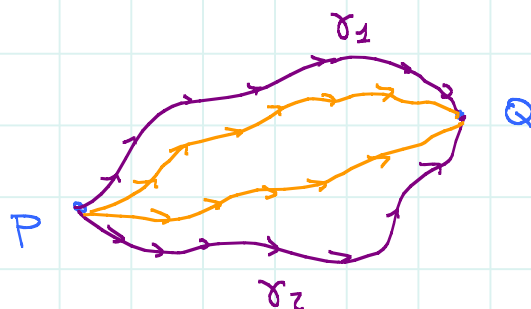
$$\Phi(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\Phi(a, s) = P \quad \forall s \in [0,1]$$

$$\Phi(b, s) = Q \quad \forall s \in [0,1]$$

Per ogni $s \in [0,1]$ la curva

$$[a,b] \ni t \rightarrow \Phi(t, s) \in \Omega$$



è una curva intermedia tra γ_1 e γ_2 .

Relazioni ovvie

i viceversa sono tutti falsi

Connesso $\Rightarrow$ Stellato $\Rightarrow$ Sempl. connesso $\Rightarrow$ connesso

Teorema Se ω è una forma diff. abbastanza regolare e Ω è sempl. connesso, allora

ω chiusa $\Rightarrow \omega$ esatta

Teorema Se ω è una forma diff. chiusa (senza ipotesi su Ω) e γ_1 e γ_2 sono due curve omotope con gli stessi estremi, allora

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Secondo lemma primo

Sia γ una qualunque curva chiusa.

Se Ω è sempl. connesso, allora γ è omotopa alla curva costante

Se la forma è chiusa, allora per il secondo teorema

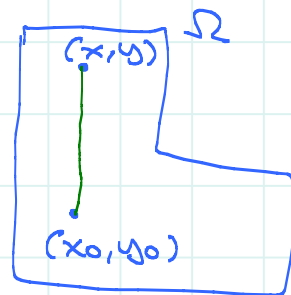
$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\text{curva cost}} \omega = 0$$

Ma allora ω è esatta per la caratterizzazione.

Dim primo nel caso $d=2$ e Ω stellato

Supponiamo $A_y(x,y) = B_x(x,y)$, cioè la chiusura e troviamo la primitiva.

Scegliamo (x_0, y_0) una postazione del guardiano e per ogni $(x,y) \in \Omega$ definiamo la primitiva come



$$V(x, y) := \int_{\gamma} \omega$$

γ $\nwarrow$ curva dritta
tra (x_0, y_0) e (x, y)

Direttissima : $(x_0, y_0) + t\{(x, y) - (x_0, y_0)\} \quad t \in [0, 1]$

$(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $x(t) \quad y(t)$

Quindi

$$V(x, y) = \int_0^1 \{ A(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \underbrace{(x - x_0)}_{\dot{x}(t)} + \\ + B(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \underbrace{(y - y_0)}_{\dot{y}(t)} \} dt$$

Spero che $V_x = A$ e $V_y = B$

Facciamo la prima. Si tratta di derivare un integrale dipendente da parametro:

$$V_x(x, y) = \int_0^1 \{ A_x(\dots) (x - x_0)t + A(\dots) \\ + B_x(\dots) (y - y_0)t \} dt$$

Derivo dentro
rispetto a x
e uso la chain
rule e derivata del
prodotto

$\uparrow$
uso che
 $A_y = B_x$

$$= \int_0^1 \{ A_x(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) (x - x_0)t \\ + A(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \\ + A_y(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) (y - y_0)t \} dt$$

Il nostro dentro è
una derivata!

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{d}{dt} [t A(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))] \right\} dt$$

Analisi 1: $\rightarrow$ $A(x, y)$ $\circ$

tolgo integrale
e sostituisco
 $t=0$ e $t=1$

— 0 — 0 —