

FORME DIFF

$$\omega = \sum_{i=1}^d A_i(x) dx_i$$

$$A_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

Data $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, si definisce

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^d A_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\} dt$$

Supponiamo sempre γ continua + C^1 a tratti (cioè $[a, b]$ è unione finita di intervalli chiusi in cui γ è C^1).

$$d=2 \quad \omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

$$d=3 \quad \omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

Def 1 Una forma diff. ω si dice **CHIUSA** se

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

per ogni $i \neq j$

(supponiamo che le derivate esistano)

$$d=2 \quad A_y = B_x$$

$$d=3 \quad A_y = B_x \quad A_z = C_x \quad B_z = C_y$$

In generale la chiusura sono $\frac{d(d-1)}{2} = \binom{d}{2}$

Def. 2 Una forma diff. ω si dice **ESATTA** in Ω se esiste $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = A_i(x) \quad \forall x \in \Omega$$

[V si dice "primitiva" o "potenziale"]

Oss. importante Bisogna sempre precisare esatta DOVE, cioè
→ ω può essere esatta in $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^d$, ma non in $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$
→ ω può essere esatta in Ω_1 e in Ω_2 , ma NON esatta in $\Omega_1 \cup \Omega_2$

$$d=2 \quad V_x = A \quad V_y = B$$

$$d=3 \quad V_x = A \quad V_y = B \quad V_z = C$$

IMPLICAZIONE FACILE Ammesso che i coeff. siano abbastanza regolari, allora

$$\omega \text{ esatta in } \Omega \Rightarrow \omega \text{ chiusa in } \Omega$$

Leggendo l'implicazione al contrario

$$\omega \text{ non chiusa in } \Omega \Rightarrow \omega \text{ non esatta in } \Omega \Rightarrow \text{ niente prim.}$$

Dim È il teorema di scambio dell'ordine di derivazione.
Se

$$A_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad A_j = \frac{\partial V}{\partial x_j}$$

Allora

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

[Vedere in $d=2$ e $d=3$ che succede]

CONSEGUENZA DELL'ESATTEZZA Se ω è esatta in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
e $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ C^1 a tratti,
allora

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

integrale della forma =
differenza di potenziale
tra gli estremi

Dim per $d=2$ Per ipotesi $V_x(x,y) = A(x,y)$ e $V_y(x,y) = B(x,y)$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$\stackrel{\omega \text{ esatta}}{=} \int_a^b \{ V_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + V_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \right\} dt$$

$$\stackrel{\text{Analisi 1}}{=} V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(a))$$

[Riscrivere per esercizio in 3 o d variabili]
— o — o —

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)

Sia ω forma diff. in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, abbastanza regolare.

Allora i seguenti 3 fatti sono equivalenti

(i) ω è esatta, cioè esiste V

(ii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi si ha che

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

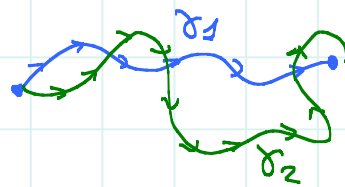
(iii) per ogni curva chiusa γ si ha che $\int_{\gamma} \omega = 0$.

Dim. L'idea è che (i) e (ii) si parlano attraverso il (i)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Prendo una curva chiusa, e considero una seconda curva chiusa che sta sempre ferma nel p.to di partenza/arrivo della prima.

L'integrale è lo stesso, ma nel secondo caso è 0.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Prendo γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi e costruisco una terza curva γ che segue γ_1 all'andata e poi torna indietro lungo γ_2 . Allora γ è chiusa, quindi



$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \leadsto \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

$\uparrow$ (iii) vera $\uparrow$ γ_2 è percorsa al contrario

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dal risultato precedente sappiamo che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega =$ diff. potenziale tra gli estremi.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Non banale e lo facciamo nel caso $d=2$

Devo costruire il potenziale.

Fisso $(x_0, y_0) \in \Omega$ e per ogni altro $(x, y) \in \Omega$ definisco

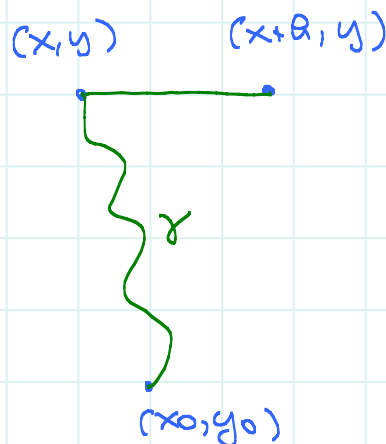


$$V(x, y) = \int_{\gamma} \omega \quad \text{(sappiamo che non dipende da } \gamma \text{)}$$

$\uparrow$ qualunque curva che unisce (x_0, y_0) a (x, y)

Verifico che $V_x(x, y) = A(x, y)$ (l'altra verifica è uguale)

$V(x+h, y)$ = per definirlo uso la curva che andava bene prima + segmento



$$= \underbrace{\int_{\gamma} \omega}_{V(x, y)} + \int_{\text{segmento}} \omega$$

$$\begin{aligned}
 V(x+h, y) - V(x, y) &= \int_{\text{segmento}} \omega \\
 &= \int_0^1 \{ A(x+th, y) \cdot \underbrace{h}_{\dot{x}(t)} + B(x+th, y) \cdot \underbrace{0}_{\dot{y}(t)} \} dt \\
 &= h \int_0^1 A(x+th, y) dt
 \end{aligned}$$

segmento
(x+th, y) t ∈ [0, 1]

Quindi dividendo per h

$$\frac{V(x+h, y) - V(x, y)}{h} = \int_0^1 A(x+th, y) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} A(x, y)$$

Ora possiamo passare al limite nell'integrale dipendente da parametro e ottenere

$$\int_0^1 A(x, y) dt = A(x, y)$$

— 0 — 0 —

Domanda: ma siamo sicuri che esista γ che congiunge (x_0, y_0) con (x, y) ?