

FORME DIFFERENZIALI E CAMPI DI VETTORI

(Presentazione da corso di servizio)

Non definizione In $\mathbb{R}^2$ una forma differenziale si presenta nella forma

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

↑
omega piccolo

dove $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono due funzioni $A: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $B: D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ diciamo aperto.

In $\mathbb{R}^3$ è la stessa cosa

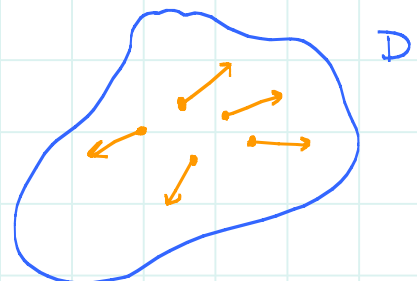
$$\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

↑ ↑ ↑
coeff. che dipendono da 3 variabili
definiti in $D \subseteq \mathbb{R}^3$

La stessa cosa si generalizza in n variabili.

Campo di vettori

In due variabili possiamo associare alla forma scritta sopra il campo di vettori $(A(x, y), B(x, y))$



INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. LUNGO UNA CURVA

INTEGRAZIONE ORIENTATA

Vediamo in due variabili (tanto è uguale anche in D)

① Notazioni $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} A(x,y) dx + B(x,y) dy$

Sto integrando una forma ω lungo una curva γ .

Si intende che

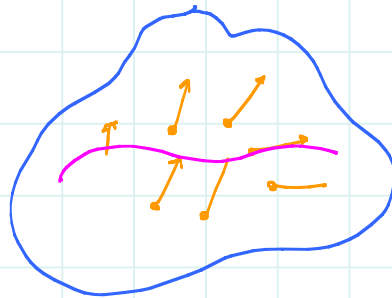
$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva di classe C^1

A e B sono definiti almeno sul supporto di γ .

② Significato fisico

In ogni p.to raggiunto dalla curva faccio il prodotto scalare tra il campo (A,B) e la velocity $(\dot{x}, \dot{y})$

↑
vettore



Quello che ottengo è l'integro lungo la curva.

Si tratta del lavoro compiuto dalla forza $\vec{F} = (A,B)$ su un p.to materiale che percorre la curva

③ Idea della definizione Si prende la solita partizione

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$$

e si considera una somma del tipo

$$\sum_{i=1}^n A(x(t_i), y(t_i)) (x(t_i) - x(t_{i-1})) + B(x(t_i), y(t_i)) (y(t_i) - y(t_{i-1}))$$

↑
sto facendo finta che il campo sia costante in tutto l'intervallo

Due tipi di approx: $\rightarrow$ suppongo il campo costante tra t_{i-1} e t_i
 $\rightarrow$ suppongo che il punto vada da $\gamma(t_{i-1})$ a $\gamma(t_i)$ lungo il segmento
(solita poligonale)

Poi raffittiamo la partizione e speriamo che converga a qualcosa.

④ Formula per il calcolo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

Brutalmente: al posto di x e y in A e B sostituisco $x(t)$ e $y(t)$
al posto di dx metto $\dot{x}(t)dt$
" dy " $\dot{y}(t)dt$

Sto integrando il prodotto scalare tra campo e velocity
 $\quad \quad \quad _ \circ _ \circ _$

Relazione tra integrali di forme e di funzioni

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (A \dot{x} + B \dot{y}) dt$$

$$= \int_a^b \left\{ A \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + B \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right\} \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt}_{ds}$$

prodotto scalare tra il campo
ed il vettore tangente alla
curva

$$= \int_{\gamma} \langle (A, B), \vec{\tau} \rangle ds$$

Integrazione orientata

- se cambio il verso di percorrenza, l'integrale cambia segno
- eventuali tratti ripetuti avanti/indietro danno contributo nullo.

Resta vero che, se riparametrizzo la curva conservando il verso di percorrenza, allora l'integrale è lo stesso.

Matematicamente, ripetendo la dimostrazione con la φ , questa volta mi trovo a raccogliere $\dot{\varphi}(t)$, senza il valore assoluto.

Nella formula che lega $\int_{\gamma} \omega$ a quello di una funzione, il τ cambia segno quando vado al contrario.

Esempio $\omega = (x^2 + y)dx + xy dy$

γ = semicirconferenza $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ percorsa in verso orario

$$\int_{\gamma} \omega$$

Applico la formula con $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$

Occhio! L'orientazione è quella opposta, quindi devo mettere il segno -

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= - \int_0^{\pi} \left\{ \underbrace{\cos^2 t}_{x^2} + \underbrace{\sin t}_y \right\} \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}} + \underbrace{\cos t}_{\dot{x}} \cdot \underbrace{\sin t}_y \cdot \underbrace{\cos t}_{\dot{y}} dt \\ &= - \int_0^{\pi} \left\{ -\cancel{\cos^2 t} \sin t - \sin^2 t + \cancel{\cos^2 t} \sin t \right\} dt = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Con tanta pazienza potevo usare $(t, \sqrt{1-t^2})$ con $t \in [-1, 1]$ che ha il verso giusto!

$$\int_0 \omega = \int_{-1}^1 \left\{ \underbrace{(t^2)}_{x^2} + \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_y \cdot \underbrace{1}_{\dot{x}} + \underbrace{t}_x \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_y \cdot \underbrace{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}}_{\dot{y}} \right\} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ \cancel{t^2} + \sqrt{1-t^2} - \cancel{t^2} \right\} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad (\text{area semicirconfenza}) \quad \text{😊}$$

— o — o —