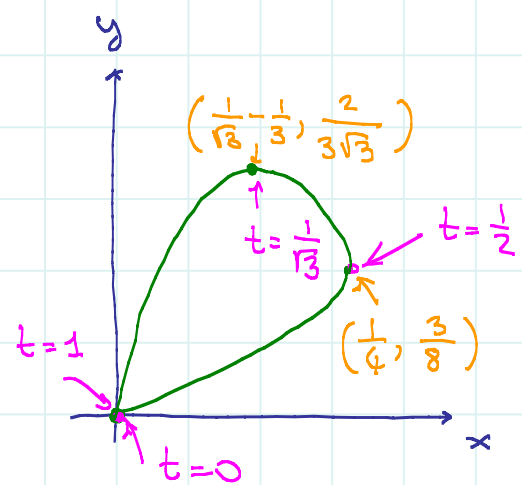
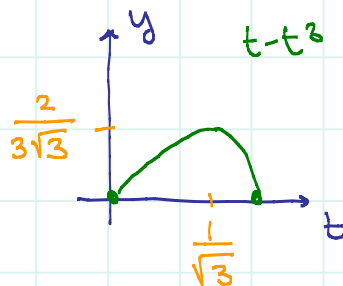
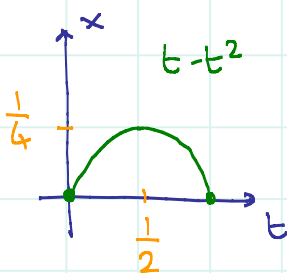


Esempio di disegno del sostegno

$$\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Sappiamo dallo studio precedente che γ è chiusa e semplice.

Studiamo separatamente le componenti



$$y'(t) = 1 - 3t^2$$

si annulla per $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Dal disegno delle singole componenti si deduce quello generale.

- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ abbiamo $x(t) \nearrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ abbiamo $x(t) \searrow$ e $y(t) \nearrow$
- Per $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ abbiamo $x(t) \searrow$ e $y(t) \searrow$

Supponiamo $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [0, 2]$.

→ $x(t)$ e $y(t)$ crescono in $[0, 1]$

→ " " decrescono in $[1, 2]$

Possiamo concludere che è semplice? **NO**



LUNGHEZZA DI UNA CURVA

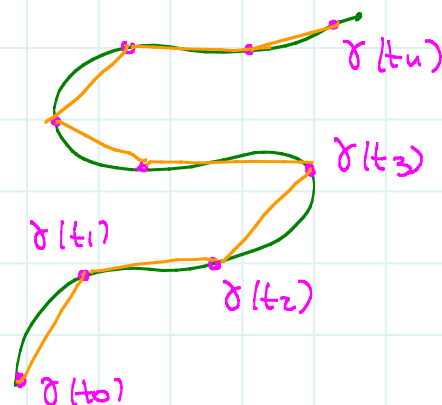
Def. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva. Si definisce

$$\text{Lunghe}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| : a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b \right\}$$

Il sup è fatto al variare della partizione

Intuitivamente

- scelgo istanti $a \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq b$
- fotografo dove si trova l'animale in quegli istanti
- unisco i puntini e ottengo una spezzata
- la lunghe. della spezzata è la sommatoria nella formula
- l'idea è che la spezzata è sempre più "corta" della curva, ma se i t_i sono abbastanza "fitti" l'approssimazione è molto buona.



Def. Se il sup è un numero reale (per forza ≥ 0) la curva si dice rettificabile (cioè ha lunghe. finita).

Oss. Eventuali tratti ripetuti del sostegno contano più volte.

Esempio Consideriamo la curva teletrasporto

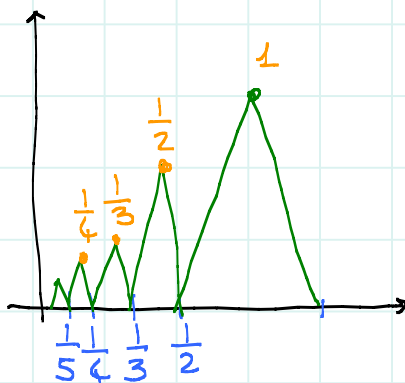
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{se } t \in [0, 1] \\ (4, 5) & \text{se } t \in (1, 2] \end{cases}$$

Che lunghezza ha? $\sqrt{34} !!$



Esempi di curve di lungh. infinita

Fatto apposta



Lunghezza curva = somma lunghezze dei lati (faccio le fotografie quando l'ovino è nei vertici)

ogni lato $\nearrow$ obliquo è più lungo dell'altezza

$$\geq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Fatto un po' meno apposta

$$\gamma(t) = (t, t \sin^2 \frac{1}{t}) \quad t \in [0, 1]$$

Questa curva percorre un tratto del grafico di $y = x \sin^2 \frac{1}{x}$

Si annulla quando $\frac{1}{x} = k\pi$ e vale x quando $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ancora una volta posso stimare la lunghezza con una poligonale



$$\text{Lunghezza poligonale} \geq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} = +\infty$$

valori della funzione quando $\sin^2 = 1$

— o — o —

Teorema Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva di classe C^1 .

Allora

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

lunghe = integrale della speed

Oss. In due variabili diventa

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Variaute (Caso di una curva data in coord. polari) $\rho(t), \theta(t)$

Allora $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 &= [\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta]^2 + [\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta]^2 \\ &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

Curve cartesiane Se $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $t \in [a, b]$

(curva che percorre un pezzo di grafico)

allora

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Oss. Se due curve percorrono lo stesso sostegno una sola volta e senza saltare, allora la lunghezza è la stessa.