

- 3.1 Curve e integrali curvilinei
- 3.2 Campi di vettori e forme differenziali
- 3.3 Superfici e integrali superficiali
- 3.4 Teorema della divergenza e formula di Gauss-Green
- 3.5 Teorema del rotore e formula di Stokes.

CURVE Una curva è una funzione

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$\underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ \text{1 variabile} \\ \text{(tempo)}}$
 $\quad \quad \quad \uparrow \substack{\text{d variabili (o anche un} \\ \text{insieme generico)}}$

$d=2$ Curve nel piano $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$d=3$ " nello spazio $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Intuitivamente: descrizione del percorso di un oggetto

Def. Il **SOSTEGNO** di una curva è la sua immagine cioè

$$\{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^d : t \in [a, b] \}$$

Achtung! Non bisogna confondere una curva con il suo sostegno

Intuitivamente:

→ la curva è il video

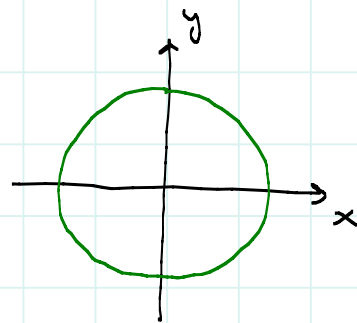
→ il sostegno è una foto di tutti i punti percorsi.

Esempi

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 6\pi]$$

$$\gamma_3(t) = (\sin t, \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$$



Tutte hanno come sostegno la circ. $x^2 + y^2 = 1$,
ma lo percorrono un numero diverso di volte e in verso diverso.

Esempi Il sostegno a lato è percorso da

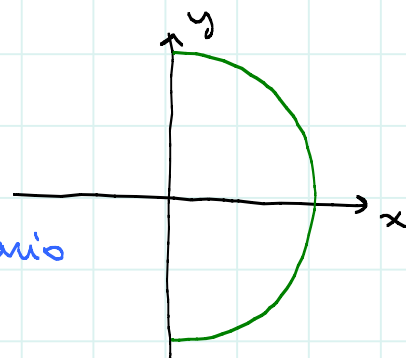
$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

↗ antiorario

$$\gamma_2(t) = (\sqrt{1-t^2}, t) : t \in [-1, 1]$$

↙

$$\gamma_3(t) = (\sqrt{1-t^2}, -t) : t \in [-1, 1] \leftarrow \text{orario}$$



Def. Una curva si dice

- **CHIUSA** se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (torna in partenza)
- **SEMPLICE** se è iniettivo, tranne al più agli estremi (non ripassa due volte dallo stesso p.to, tranne al più partenza ed arrivo)

Def. Supponiamo che γ sia derivabile (cioè lo sono le componenti).

Allora definiamo

→ **VELOCITY** il vettore $\dot{\gamma}(t)$

→ **SPEED** il numero $\|\dot{\gamma}(t)\|$

→ **RETTA TANGENTE** la retta di equazione parametrica

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0)$$

ben definita
se $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$ come vettore

Esempio $\gamma(t) = (t^2 - t, t + e^t)$ $t \in [0, 12]$

Calcolare la retta tangente nel p.to con $t=1$

$$\gamma(1) = (0, e+1) \quad \dot{\gamma}(t) = (2t-1, 1+e^t)$$

$$\dot{\gamma}(1) = (1, e+1)$$

In parametrica la retta è

$$(0, e+1) + t(1, e+1) = \left(\underset{\text{"x"}}{t}, \underset{\text{"y"}}{e+1 + (e+1)t} \right)$$

Se la voglio in cartesiana è

$$y = (e+1)x + (e+1)$$

Operazioni da fare

→ Stabilire se γ è chiusa (banale: sostituire a e b)

→ " " " semplice

→ Calcolare rette tangenti (si usa la formula)

→ Disegnare il sostegno

Quattro strategie per studiare la semplicità

① Sperare che ci sia una componente strett. monotona

$$\gamma(t) = (t - t^2, t + e^t) \quad t \in [0, 12] \quad \leadsto \text{non è semplice}$$

↑
no
monot.

↑
monotona
cresc. su $\mathbb{R}$

$$y'(t) = 1 + e^t \geq 1$$

sempre

$$\gamma(t) = (t^2, \sin t, t - t^6 + \arctan t) \quad t \in [-1, 1] \quad \leadsto \text{semplice}$$

↑
monotona in $[-1, 1]$

$$\gamma(t) = (t^2, \cos t) \quad \text{con } t \in [-1, 1] \quad \leadsto \text{NON è semplice perché}$$

↑
Fa avanti / indietro
sullo stesso percorso

$x(t) = y(t)$ sono PARI, quindi

$$\gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma\left(-\frac{1}{3}\right)$$

② Sperare di trovare una quantità monotona

$$\gamma(t) = (t - 6t^2, 2t - 7t^2) \quad t \in [0, 5] \quad \text{no semplice}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
non sono monotone
in $[0, 5]$

Però $7x(t) - 6y(t) = -5t \rightsquigarrow$ monotona

[Se non fosse semplice, esisterebbero $t_1 \neq t_2$ tali che $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$, ma allora $-5t_1 = -5t_2$]

$$\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t) \quad \text{con } t \in [0, 3]$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = t^2 \quad \text{che è monotona in } [0, 3].$$

Oss. Sia ① sia ② falliscono se γ è chiusa

③ Monotonia a zone

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Considero due zone

- per $t \in [0, \pi]$ si ha che $x(t)$ è monotona e $y(t) \geq 0$
- per $t \in [\pi, 2\pi]$ si ha che $x(t)$ è monotona e $y(t) \leq 0$

Questo basta per concludere che è semplice. Perché?

Siano t_1 e t_2 che violano l'injectività. Allora

→ t_1 e t_2 non possono essere entrambi in $[0, \pi]$

→ " " " " $[\pi, 2\pi]$

→ quindi sono uno in $[0, \pi]$ e uno in $[\pi, 2\pi]$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{qui } y(t) \geq 0 & \text{qui } y(t) \leq 0 \end{array}$$

Ma allora ci si riduce ai casi con $y(t) = 0$, che sono pochissimi $t = 0, \pi, 2\pi$.

④ Risolvere esplicitamente il sistema

$$\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3) \quad t \in [0, 1].$$

Si vede subito che $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0)$, quindi la curva è chiusa, quindi viene ④ e ②.

Prendiamo t ed s tali che $\gamma(t) = \gamma(s)$ e vogliamo dedurre che t ed s sono 0 oppure 1

$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = t^2-s^2 \\ t-s = t^3-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t-s)(t+s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

Se $t = s$, allora sono contento, altrimenti semplifico:

$$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases} \quad \begin{cases} s = 1-t \\ 1 = t^2+t(1-t)+(1-t)^2 \end{cases}$$

$$\leadsto 1 = \cancel{t^2} + t - \cancel{t^2} + 1 - 2t + t^2 \leadsto t^2 - t = 0 \leadsto t(t-1) = 0$$

Quindi restano

$t = 0$	$\leadsto$	$s = 1$	} sono gli estremi.
$t = 1$	$\leadsto$	$s = 0$	
$- 0$	$- 0$	$-$	