

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Setting $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e $(t_1, t_2) \subseteq \mathbb{R}$
 $f: [a, b] \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix}$

Costruisco

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x, t) dx \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

$\uparrow$
 parametro

Domande: φ è continua? φ è derivabile?

Più in generale possiamo considerare integrali doppi o tripli, tipo

$$\varphi(t) := \iint_A f(x, y, t) dx dy \quad A \subseteq \mathbb{R}^2, \quad f: A \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$\uparrow$
 parametro

e idem con integrali tripli.

Uno vorrebbe tanto dire che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, x) dx$$

Il limite dell'integrale è l'integrale del limite

$$\varphi'(t_0) = \frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t_0) dx$$

La derivata dell'integrale è l'integrale della derivata

In generale i teoremi di scambio sono **FALSI**

Diventano veri sotto ipotesi di **UNIFORMITÀ**

Teorema di scambio del limite (Ipotesi minimaliste)

Mettiamoci come nel setting e prendiamo $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Supponiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in (a, b) \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$$

Allora

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0) = \int_a^b f(x, t_0) dx$$

quindi vale
lo scambio

Dim. Consideriamo ε e δ come sopra. Allora

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \int_a^b f(x, t) dx - \int_a^b f(x, t_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \{ f(x, t) - f(x, t_0) \} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

↑
vale se
 $|t - t_0| \leq \delta$ ← Qui serve che δ non dipenda da x

Questo ci dice che $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| \leq \varepsilon(b-a)$ se $|t - t_0| \leq \delta$.

Oss. L'ipotesi non è Questo δ dipende da x e da ε

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \overbrace{\exists \delta > 0}^{\text{Questo } \delta \text{ dipende da } x \text{ e da } \varepsilon} \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$$

UNIFORME

MA è Questo δ dipende solo da ε , e va bene $\forall x$, cioè è

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overbrace{\exists \delta > 0}^{\text{Questo } \delta \text{ dipende solo da } \varepsilon} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| \leq \varepsilon$$

Quale delle due dice che $\forall x \in [a, b] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$?

LA PRIMA !!!

Oss. Se $f(x, t)$ è continua in $[a, b] \times [t_1, t_2]$, allora è uniformemente continua, quindi le ipotesi sono verificate gratis.

Teorema di scambio della derivata

Solito setting. Supponiamo che $f_t(x, t_0)$ esista in maniera uniforme, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \overbrace{\exists \delta > 0}^{\text{NON DIPENDE DA } x} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall h \in [-\delta, \delta]$$

$$\left| \frac{f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)}{h} - f_t(x, t_0) \right| \leq \varepsilon$$

Allora

$$\varphi'(t_0) \text{ esiste e vale } \int_a^b f_t(x, t_0) dx$$

Dim Fisso $\varepsilon > 0$ e prendo il δ dato dall'ipotesi.

Allora per ogni h tale che $h \in [-\delta, \delta]$ vale che

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} - \int_a^b f_t(x, t_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h} dx - \int_a^b f_t(x, t_0) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{\left| \frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h} - f_t(x, t_0) \right|}_{\leq \varepsilon \text{ per ipotesi}} dx \\ &\leq \varepsilon (b-a). \end{aligned}$$

— o — o —

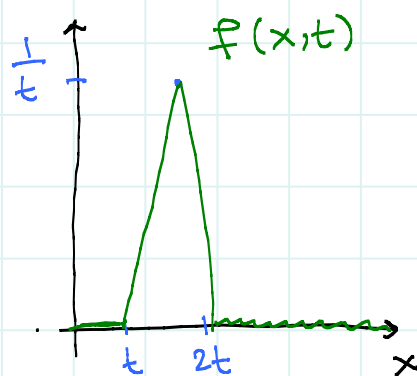
Oss. Le ipotesi sono verificate GRATIS se $f_t(x, t)$ esiste ed è continua in tutto $[a, b] \times [t_1, t_2]$

— o — o —

L'ESEMPIO $x \in [0, 1], t \in [0, 1]$

Definiamo $f(x, t)$ come in figura

Cosa succede?



① Per ogni $t > 0$ si ha che

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \text{Area triangolo} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$$

② Per ogni $x \in [0, 1]$ si ha che $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = 0$

il $\uparrow$ triangolo
"scompare"

Quindi il teorema di scambio NON VALE.

— o — o —

Oss. Le dim. fatte finora valgono anche per integrali doppi o tripli.

— o — o —

Caso con anche estremi variabili

$$\varphi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$$

Sotto ipotesi ragionevoli vale la formula

$$\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx - f(a(t), t) a'(t) + f(b(t), t) b'(t)$$

Dim Basta considerare

$$F(a, b, t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

e osservare che $\varphi(t) = F(a(t), b(t), t)$ e

$$F_t(a, b, t) = \int_a^b f_t(x, t) dx \quad (\text{se vale tes. scambio})$$

$$\left. \begin{aligned} F_a(a, b, t) &= -f(a, t) \\ F_b(a, b, t) &= +f(b, t) \end{aligned} \right\} \text{Analisi 1}$$

e quindi applicare la chain rule.

— o — o —