

Coordinate cilindriche nello spazio (ρ, θ, z)

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

$$J = \rho$$

È come fare le polari nel piano xy , lasciando la quota z inalterata come nelle cartesiane

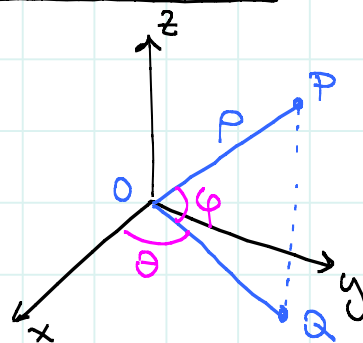
Coordinate sferiche nello spazio

VERSIONE DEI GEOGRAFICI

$$\rho = \text{distanza } OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \text{latitudine}$$

$$\theta = \text{coord. polare di } Q \text{ nel piano}$$



$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

$$J = \rho^2 \cos \varphi$$

↑ quello che è ≥ 0 nel range opportuno

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

↑ latitudine

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

↑ longitudine

Esempio 1 $S =$ sfera unitaria con centro nell'origine

$$\iiint_S x^2 dx dy dz$$

1° modo Per colonne

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 \cdot 2 \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

2° modo Per sezioni

$$\int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} x^2 dx dy = \int_{-1}^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \cdot p = \text{si fa}$$

$\uparrow$
Disco di raggio $\sqrt{1-z^2}$

[Così facendo abbiamo usato coord. cilindriche]

3° modo Coord. sferiche

$$\int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \, \underbrace{p^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta}_{x^2} \underbrace{p^2 \cos \varphi}_J$$
$$= \underbrace{\int_0^1 p^4 dp}_{\frac{1}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 d\theta}_{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi$$

$$\int \cos^3 \varphi d\varphi = \int \cos^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \int (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$\stackrel{\substack{t = \sin \varphi \\ dt = \cos \varphi d\varphi}}{\rightarrow} \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 = \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi$$

$$= \frac{\pi}{5} \left[\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi = -\pi/2}^{\varphi = \pi/2} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{15}$$

4° modo Sferiche astute!

Osservo che $\int_S x^2 dx dy dz = \int_S y^2 \dots = \int_S z^2 \dots$ e quindi

$$\iiint_S x^2 dx dy dz = \frac{1}{3} \iiint_S (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

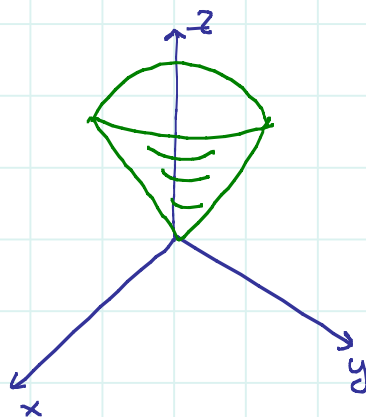
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \, p^2 \cdot p^2 \cos \varphi = \frac{1}{3} \underbrace{\int_0^1 p^4 dp}_{\frac{1}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi}_2$$
$$= \frac{4\pi}{15} \quad \therefore$$

Esempio 2 $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2+z^2 \leq 2}_{\text{dentro la sfera}}, z \geq 0, \underbrace{z^2 \geq x^2+y^2}_{\text{dentro il cono } z=\rho} \}$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

Come è fatto A?

È un cono con sopra la pallina del gelato!



1° modo Per colonne [Provare per esercizio]

2° modo Per sezioni

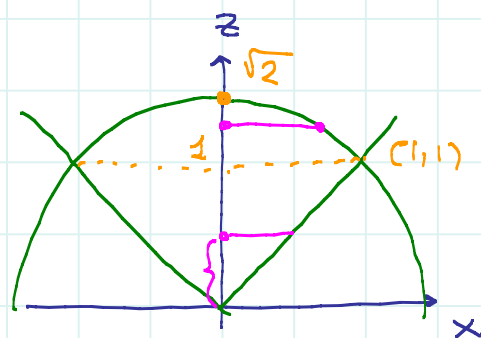
$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \cdot z \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy$$

↖ cerchio di raggio z

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} dz \cdot z \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy$$

↖ cerchio di raggio $\sqrt{2-z^2}$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z^2 \, dz + \int_1^{\sqrt{2}} z \cdot \pi (2-z^2) \, dz = \text{si fa}$$



3° modo Coordinate sferiche

Osservo che A sono tutti i p.ti della sfera con latitudine $\in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

A questo p.to

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho \sin \varphi \, \rho^2 \cos \varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{8}$$

$\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Esempio 3 Volume calotta sferica

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq a\} \quad a \in [-R, R]$$

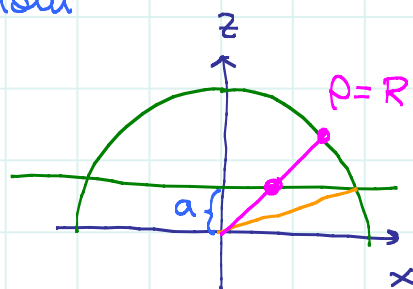
Per sezioni

$$\int_a^R dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \pi \int_a^R (R^2 - z^2) \, dz = \text{si fa.}$$

$\uparrow$ cerchio di raggio $\sqrt{R^2 - z^2}$

In sferiche $\theta \in [0, 2\pi]$ (invariante per rotazioni intorno all'asse z)

$$\varphi \in [\arcsin(\frac{a}{R}), \frac{\pi}{2}] \quad R \sin \varphi_{\min} = a$$



Dove varia ρ ? Sicuramente $\rho \leq R$

$$z \geq a \quad \text{cioè} \quad \rho \sin \varphi \geq a \rightsquigarrow \rho \geq \frac{a}{\sin \varphi}$$

$$\rho \in \left[\frac{a}{\sin \varphi}, R \right]$$

Volendo usare le sferiche, mi ritrovo

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\arcsin(\frac{a}{R})}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{a}{\sin \varphi}}^R d\rho \, \rho^2 \cos \varphi$$

$$= 2\pi \int_{\arcsin(\frac{a}{R})}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \underbrace{\int_{\frac{a}{\sin \varphi}}^R \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{3} \frac{a^3}{\sin^3 \varphi}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{\arcsin(\frac{a}{R})}^{\frac{\pi}{2}} \left(R^3 - \frac{a^3}{\sin^3 \varphi} \right) \cos \varphi \, d\varphi$$

= si fa. [Controllare che venga lo stesso]

— o — o —