

Formula di cambio di variabili negli integrali multipli

In 2 variabili (poi in 3 è uguale)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B g(u,v) J(u,v) du dv$$

insieme A
descritto nelle
variabili (u,v)

funzione f
scritta nelle
variabili (u,v)

pagamento

Esempio 1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 6 \leq x-y \leq 7\}$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

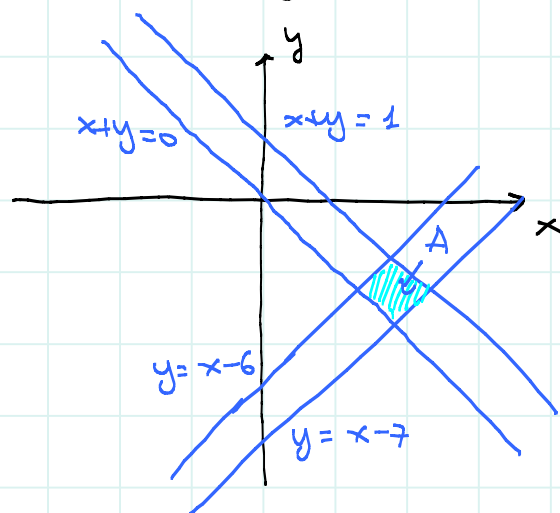
Noni pone

$$u = x+y$$

$$v = x-y$$

perché così l'insieme diventa

$$0 \leq u \leq 1, 6 \leq v \leq 7 \quad \text{Descrizione insieme B}$$



$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv \quad \text{Nuova funzione da integrare}$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 du \int_6^7 dv \quad uv \quad J(u,v)$$

Come calcolo $J(u,v)$? ① Ricavare (x e y in funzione di u e v)

② Matrice Jacobiana

③ Det

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x = u+v \leadsto x = \frac{u+v}{2} \\ 2y = u-v \end{matrix} \quad y = \frac{u-v}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ Matrice jacobiana } = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} J(u,v) := |\text{Det}(\text{matrice})| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Conclusione: basta calcolare $\int_0^1 du \int_0^1 dv \quad uv \cdot \frac{1}{2} = \text{si fa banale}$

Esempio 2 Back to coordinate polari

$$\textcircled{1} x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} |\text{Det}| = | \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta | = \rho \quad \textcircled{!}$$

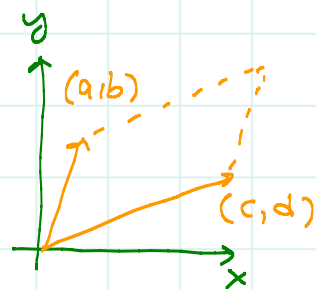
Idea del perché funziona la formula

→ Supponiamo che il cambio variabili sia lineare

$$\begin{matrix} (1,0) \rightarrow (a,b) & (u,v) \rightarrow (au+cv, bu+dv) \\ (0,1) \rightarrow (c,d) & \quad \quad \quad \begin{matrix} \text{"x"} & \text{"y"} \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

In questo modo il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ viene trasformato nel parallelogramma spuntato da (a,b) e (c,d)

L'area è $|ad-bc|$



→ Se il cambio non è lineare, tuttavia per Taylor in piccolo è come se lo fosse.

Esempi classici di cambio di variabili

① Traslazioni

$$u = x + a$$

$$v = y + b$$

La matrice è l'identità e $J = 1$

② Dilatazioni lungo gli assi

$$u = ax$$

$$v = by$$

La matrice è diagonale $\leadsto J$ facile

Esempio 3

C = cerchio con centro $(2,3)$ e raggio 2

Calcolare

$$\iint_C x^2 dx$$

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-2)^2}_u + \underbrace{(y-3)^2}_v \leq 4 \}$$

$$\iint_C x^2 dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 4 \\ \text{C nelle nuove} \\ \text{variabili}}} \underbrace{(u+2)^2}_{x^2} \cdot \underbrace{1}_J du dv$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u^2 + 2u + 4) du dv$$

$\downarrow$
o per
simmetria

$\searrow$
4 · Area (cerchio)
" 16π

$$= 16 + \iint_{u^2+v^2 \leq 4} u^2 du dv = 16 + \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \, p^2 \cos^2 \theta \cdot p$$

$$= 16 + \pi \left[\frac{1}{4} p^4 \right]_{p=0}^{p=2} = 16 + 4\pi$$

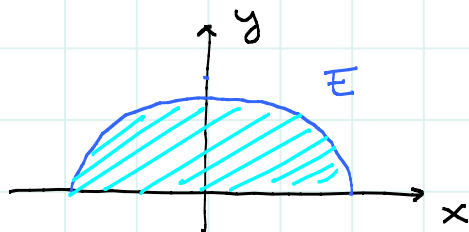
[Provare cosa verrebbe ad usare gli insiemii normali].

Esempio 4 $\iint_E |x| dx dy$ $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5, y \geq 0\}$

Cambiare nome

$$u = x \quad \rightsquigarrow \quad x = u$$

$$v = \sqrt{2}y \quad \rightsquigarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}v \quad \rightsquigarrow \quad J = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\iint_E |x| dx dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 5 \\ v \geq 0}} |u| \frac{1}{\sqrt{2}} du dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 5 \\ v \geq 0, u \geq 0}} u du dv = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{5}} dp \int_0^{\frac{\pi}{2}} p \cos \theta \cdot p d\theta = \text{si fa.}$$

Esempio 5 $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^4 + 4z^2 \leq 9\}$

Calcolare $\text{Vol}(V)$.

Integriamo per sezioni lungo asse y .

Osserviamo che $y_{\min} = -\sqrt[4]{3}$ $y_{\max} = \sqrt[4]{3}$ e quindi

$$\text{Vol}(V) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \iint_{S_y} 1 dx dz = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \text{Area}(S_y) dy$$

Adesso $S_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 4z^2 \leq 9 - 3y^4\}$
= ellisse

Esempio 5-bis Calcolare l'area dell'ellisse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + by^2 \leq c^2\}$
con a, b, c positivi.

$$ax^2 + by^2 \leq c^2 \quad \sqrt{a}x = u \quad \sqrt{b}y = v \quad J = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\text{Area} = \iint_{u^2+v^2 \leq c^2} \frac{1}{\sqrt{ab}} du dv = \frac{1}{\sqrt{ab}} \pi c^2 \quad \left[= \pi \cdot \text{prodotto dei due semi-assi} \frac{c}{\sqrt{a}} \text{ e } \frac{c}{\sqrt{b}} \right]$$

Tornando al 5 verso: $Area(S_y) = \pi \frac{9-3y^4}{2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow Volume = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_{-\sqrt[4]{3}}^{\sqrt[4]{3}} (9-3y^4) dy = \text{si fa banale.}$$

Osservazione

$$2x^2 + 3y^4 + 4z^2 \leq 9$$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_{\mu} + \underbrace{(\sqrt{3}y^2)^2}_{\nu} + \underbrace{(2z)^2}_{\omega} \leq 9$$

Provo a calcolare J:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu \quad y = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt[4]{3}} \quad z = \frac{\omega}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x_{\mu} & x_{\nu} & x_{\omega} \\ y_{\mu} & y_{\nu} & y_{\omega} \\ z_{\mu} & z_{\nu} & z_{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt[4]{3}\sqrt{\nu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Due problemi: c'è un $\sqrt{\nu}$ al denominatore

c'è un problema di segni ($\nu \geq 0$)

(per evitare questo basta spezzare la parte

$y \geq 0$ e quella ≤ 0)

— 0 — 0 —