

Integrali di 1

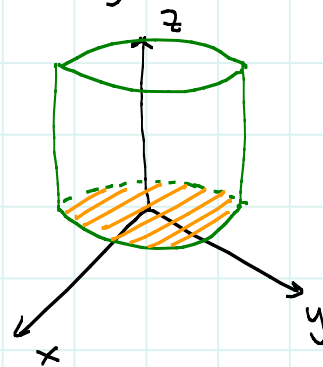
1 variabile $\int_a^b 1 dx = (b-a) = \text{lunghezza intervallo}$

2 variabili $\iint_A 1 dx dy = \text{Area}(A)$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$

3 variabili $\iiint_A 1 dx dy dz = \text{Volume}(A)$ $A \subseteq \mathbb{R}^3$

Esercizio $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z \in [0, 3]\}$

$$\iiint_A x^2 z dx dy dz$$



Per colonne Base $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\iiint_A x^2 z dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_0^3 dz x^2 z$$

↑ colonna

$$= \iint_{\Omega} x^2 dx dy \underbrace{\int_0^3 z dz}_{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \iint_{\Omega} x^2 dx dy$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta}_{x^2} \cdot \rho \uparrow \text{pag}$$

$$= \frac{9}{2} \int_0^2 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} = \frac{9}{2} \pi \cdot 4 = 18\pi$$

Per sezioni

$$z_{\min} = 0, \quad z_{\max} = 3$$

$$\begin{aligned} \iiint_A x^2 z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} x^2 z \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 z \, dz \iint_{x^2+y^2 \leq 4} x^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

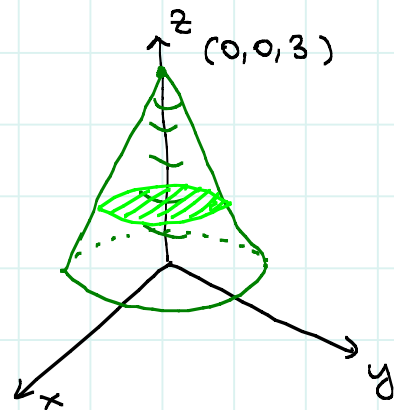
S_z ← cerchio con centro in (0,0) e raggio 2

= stesso conto di prima in senso inverso.

Esercizio 2 A = cono in figura

$$R = 2 \quad \text{altezza} = 3$$

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$



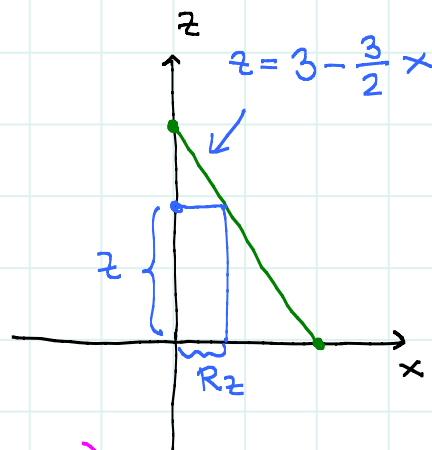
Per sezioni

$$z_{\min} = 0 \quad z_{\max} = 3$$

S_z = cerchio di raggio R_z

$$z = 3 - \frac{3}{2} R_z \quad \leadsto \quad \frac{3}{2} R_z = 3 - z$$

$$\leadsto R_z = 2 - \frac{2}{3} z$$

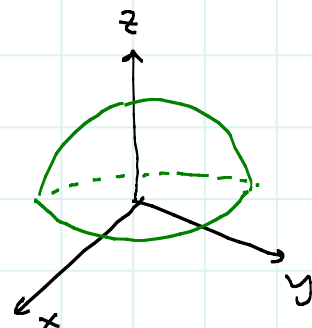


(controllino: $z = 3 \leadsto R = 0$, $z = 0 \leadsto R = 2$ ☺)

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad (z^2) \\ &= \int_0^3 z^2 \, dz \underbrace{\iint_{S_z} dx \, dy}_{\text{Area}(S_z) = \pi R_z^2 = \pi \left(2 - \frac{2}{3} z\right)^2} \\ &= \pi \int_0^3 z^2 \left(2 - \frac{2}{3} z\right)^2 dz \\ &= \text{si fa} \dots \end{aligned}$$

Esercizio 3 Volume semisfera

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \}$$



Per colonne

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq R^2 \\ \text{base } \Omega}} dx \, dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$$

Fissato $(x, y) \in \text{base}$, z varia tra 0 e $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} dx \, dy \sqrt{R^2-x^2-y^2} = \int_0^R dp \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R^2-p^2} \cdot p$$

$$= 2\pi \int_0^R p \sqrt{R^2-p^2} \, dp = 2\pi \left[\frac{2}{3} (R^2-p^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_{p=0}^{p=R}$$

$$= 2\pi \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 \quad \checkmark$$

Per sezioni

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R dz \iint_{S_z} dx \, dy$$

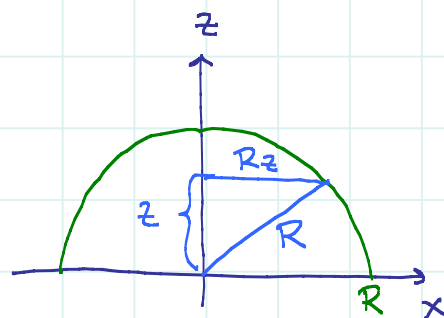
$$= \int_0^R \text{Area}(S_z) \, dz$$

$$= \pi \int_0^R R_z^2 \, dz$$

$$= \pi \int_0^R (R^2 - z^2) \, dz$$

$$= \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^R$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{2}{3} \pi R^3 \quad \checkmark$$



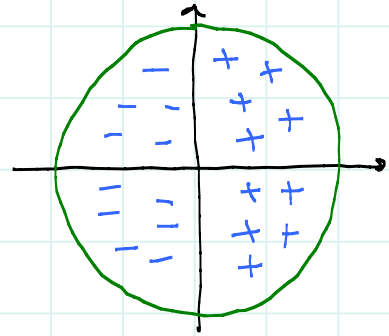
$$z^2 + R_z^2 = R^2$$

USO DELLE SIMMETRIE

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$$\iint_D x \, dx \, dy = 0$$

↑
per simmetria



Geometricamente: le parti positive nei quadranti 1 e 4 compensano esattamente le parti negative nei quadranti 2 e 3

$$\iint_D y \, dx \, dy = 0 \quad (\text{stessa cosa con sopra e sotto})$$

Analisi 1 $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ funzione dispari, allora

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

$$\text{Se } f \text{ fosse pari, allora } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$

[Formalmente si giustifica con dei cambi di variabile].

Il risultato di Analisi 2 si giustifica, allo stesso modo integrando prima (all'interno) nella variabile rispetto alla quale la funzione è dispari.

$$\iint_D x \, dx \, dy$$

Se cambio $(x, y) \rightsquigarrow (-x, y)$

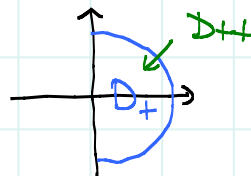
→ la funzione cambia segno

→ l'insieme resta lo stesso

$$\iint_D y^2 \arctan(xy) \, dx \, dy = 0$$

Questa $f(x, y)$ è dispari sia rispetto alla x che rispetto alla y

$$\iint_D |x| dx dy = 2 \iint_{D_+} x dx dy$$



$$= 4 \iint_{D_{++}} x dx dy$$

$$= 4 \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos \theta \cdot \rho d\theta$$

$$= 4 \underbrace{\int_0^1 \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta}_1 = \frac{4}{3}$$

$$\iint_D |y| dx dy = \frac{4}{3} \quad (\text{stessa figura di prima ruotata di } 90^\circ)$$

[La trasformazione $(x, y) \rightarrow (y, x)$

lascia l'insieme invariato e manda una funzione nell'altra]

$$\iint_{D_{++}} x dx dy = \iint_{D_{++}} y dx dy = \frac{1}{3}$$

$$\iint_D (x^3 + y^5) dx dy = 0 \quad [\text{Somma di due integrali che fanno 0 per simmetria, per rispetto ad assi diversi}]$$

Stessi discorsi valgono per gli integrali tripli.

— 0 — 0 —