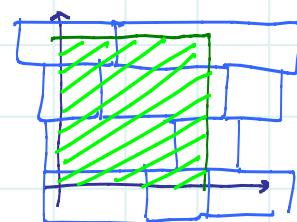


Esempio di funzione NON integrabile (DIRICHLET 2D)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \text{ con } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica che $I^-(f) = 0$ e $I^+(f) = 1$

[Basta osservare che se prendo una step funct. $\geq f$, allora i rettangoli su cui vale ≥ 1 devono ricoprire il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ e analogo per ogni step funct. $\leq f$]

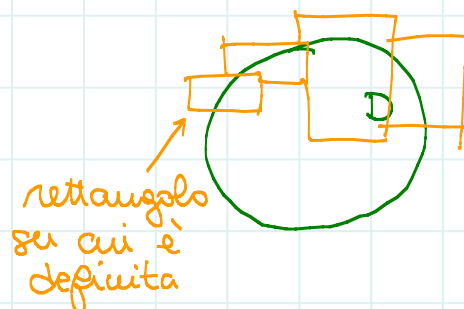


Oss. (Geometrica) Prendiamo $f(x,y)$ nulla fuori da un disco D e continua e positiva dentro.

Come è fatta una step function $\geq f$ su $\mathbb{R}^2$?

Ora i parallelepipedi devo "sfiorare in altezza" una anche al bordo, a meno che sia rettilineo e parallelo agli assi

Analogamente per una step function $\leq f$ su tutto $\mathbb{R}^2$, i rettangoli in cui è > 0 devono essere ben contenuti nel disco D .



TECNICHE DI CALCOLO

Caso dei rettangoli

$$A = [a, b] \times [c, d]$$

Formula di riduzione

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \\ &= \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \end{aligned}$$

Esempio

$$A = [0, 1] \times [2, 3]$$

$$f(x, y) = x + y^2 x^3$$

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_2^3 (x + y^2 x^3) dy$$

integro risp. a y , facendolo finta che x sia costante

$$= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{1}{3} y^3 x^3 \right]_{y=2}^{y=3}$$

primitiva rispetto a y

$$= \int_0^1 dx \left\{ 3x + 9x^3 - 2x - \frac{8}{3} x^3 \right\}$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \frac{19}{3} x^3 + x \right\} \quad \text{da qui è analisi 1}$$

$$= \left[\frac{19}{12} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{19}{12} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12}$$

In alternativa

$$\iint_A (x + y^2 x^3) dx dy = \int_2^3 dy \int_0^1 (x + y^2 x^3) dx$$

integro in x facendolo finta che y sia costante

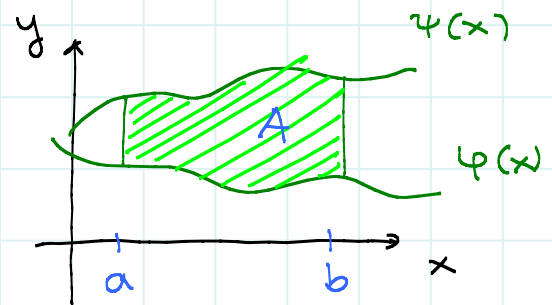
$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 dy \left[\underbrace{\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} y^2 x^4}_{\text{primitiva in } x} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dy \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} y^2 \right\} \\
&= \left[\frac{1}{2} y + \frac{1}{12} y^3 \right]_{y=2}^{y=3} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{27}{12} - 1 - \frac{8}{12} = \frac{18 + 27 - 12 - 8}{12} = \frac{25}{12} \quad \text{◡}
\end{aligned}$$

Caso degli insiemi NORMALI

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice NORMALE rispetto all'asse x se si presenta (o si può scrivere) nella forma

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

Analogamente, normale risp. asse y vuol dire che si scrive nella forma



$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

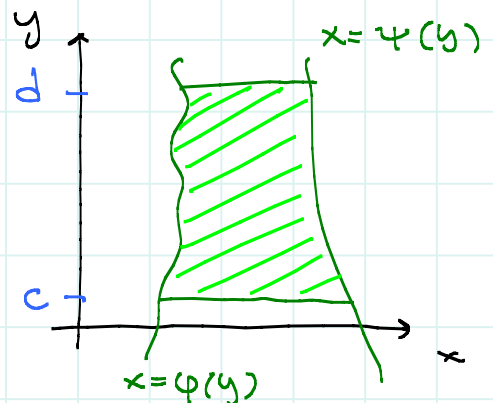
Formula di riduzione:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

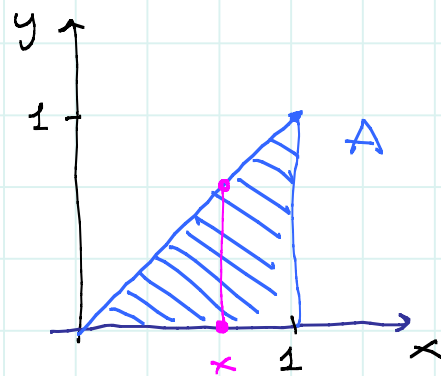
↑
normale
asse x

$$= \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

↑
normale
asse y



Esempio $A = \text{triangolo in figura}$
 $f(x,y) = xy^2$



1° modo Scrivo A come insieme normale risp. asse x

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x \}$$

$$\begin{aligned} \iint_A xy^2 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^x dy xy^2 = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=0}^{y=x} \\ &= \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{3} x^4 - 0 \right\} = \left[\frac{1}{15} x^5 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

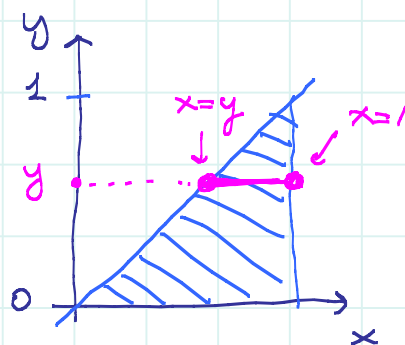
Più rapidamente:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy xy^2 = \int_0^1 x dx \underbrace{\int_0^x y^2 dy}_{\frac{1}{3} x^3} = \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 dx = \frac{1}{15}$$

2° modo Scrivo A come insieme normale rispetto asse y

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], y \leq x \leq 1 \}$$

$$\iint_A xy^2 dx dy = \int_0^1 dy \int_y^1 dx xy^2$$



$$= \int_0^1 y^2 dy \int_y^1 x dx = \int_0^1 y^2 dy \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=y}^{x=1}$$

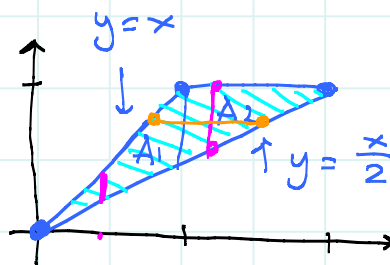
↑
primitiva in x

$$= \int_0^1 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} y^4 \right) dy$$

$$= \left[\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{10} y^5 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15} \quad \ddot{\circ}$$

Esempio $A =$ triangolo con vertici in $(0,0), (1,1), (2,1)$

$$\iint_A y^2 dx dy$$



1° modo Normale asse x

$$\begin{aligned}\iint_A \dots &= \iint_{A_1} \dots + \iint_{A_2} \dots \\ &= \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy y^2 + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy y^2 \\ &= \text{da qui si fa il conto}\end{aligned}$$

2° modo Normale asse y

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], y \leq x \leq 2y \}$$

$$\begin{aligned}\iint_A y^2 dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \underbrace{y^2}_{y} = \int_0^1 y^2 dy \int_y^{2y} 1 \cdot dx \\ &= \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{4} \quad \ddot{\smile}\end{aligned}$$

— o — o —