

INTEGRALI DOPPI (secondo RIEMANN)

Integrali **PROPRI** Setting : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo

(i) f è LIMITATA, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(ii) f nulla al di fuori di un limitato, cioè

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x,y) = 0 \text{ se } \|(x,y)\| \geq R$$

Andremo a definire

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$$

$\uparrow$ Int. doppio $\uparrow$ funzione integranda $\uparrow$ variabili di integrazione

Quello che poi si usa è

$$\iint_A f(x,y) dx dy \quad f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$\uparrow$ zona di integrazione

$$\text{Solito trucco : } \iint_A f(x,y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x,y) dx dy$$

dove

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in A \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

L'integrale è proprio se f è limitata + A limitato.

Interpretazione geometrica

$\iint_A f(x,y) dx dy = \text{Volume CON SEGNO}$ della parte di spazio compresa tra il piano base xy ed il grafico di f (le parti sopra contano con il segno $+$, quelle sotto con il segno $-$)

Definizione rigorosa (Presentazione alla DARBOUX)

Tre tappe successive

→ caso banale

→ caso semibanale

→ caso generale

Caso Banale $f(x,y)$ è uguale ad una costante λ in un rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ e 0 altrove.
Il sottografico è un parallelepipedo, per cui si definisce

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{area base}}$$

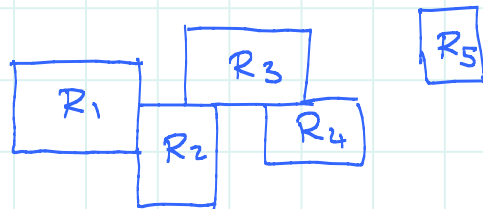
↑
altezza CON SEGNO

Caso semi-banale Step-function = funzione a gradino

C'è un insieme A costituito da una unione finita di rettangoli $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$, a due a due senza punti interni in comune.

In R_i si ha che $f(x,y) = \lambda_i$ costante.

Al di fuori vale 0.



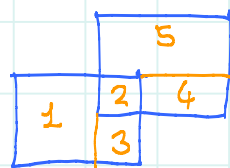
Intuitivamente il grafico è una "unione di grattacieli"

Si definisce

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i \text{Area}(R_i)}_{\text{volume con segno del parallelepipedo } i\text{-esimo}}$$

Oss. Le step function sono comb. lineari di funzioni del caso banale.

Questo è vero anche se i rettangoli si sovrappongono



Prop L'integrale di una step function dipende solo dalla funzione, e non da come è scritta a partire da una unione di rettangoli.

Caso generale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un insieme limitato.

Integrale superiore di f

$$I^+(f) := \inf \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ è step funct.} \\ \text{e } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

Integrale inferiore di f

$$I^-(f) := \sup \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy : \begin{array}{l} \varphi \dots \text{ step function} \\ \text{e } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \dots \end{array} \right\}$$

Intuitivamente: approssimiamo f dall'alto e dal basso con delle step functions.

Prop. Per ogni f come sopra vale che

$$I^-(f) \leq I^+(f)$$

[Basta osservare che se due step funct. φ e ψ verificano
 $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y) dx dy$$

cosa che risulta quasi ovvia se si osserva che φ e ψ possono essere definite usando gli stessi rettangoli.]

Def. Se succede che $I^-(f) = I^+(f)$, allora si dice che f è integrabile (secondo Riemann) e il valore comune si dice integrale doppio di f in $\mathbb{R}^2$.

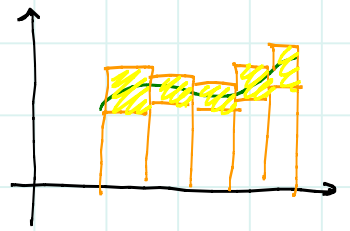
Oss. Avere f limitata e nulla fuori da un limitato garantisce che esiste almeno una step funct $\geq f$ e almeno una step funct. $\leq f$ su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi facciamo inf e sup di insiemi non vuoti.

Domanda: esistono funzioni integrabili?

[Non è nemmeno ovvio che siano integrabili quelle del caso banale]

Oss. La funzione f è integr. se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono step. funct. $\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon$ t.c. $\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) dx dy \leq \varepsilon$

Interpretazione geometrica di Analisi 1



Metateorema Funzioni decenti su insiemi decenti sono integrabili

↑
ad esempio
continua

↑
poligoni o comunque
regioni limitate da
curve "regolari"

[ufficialmente sarebbero insiemi misurabili secondo Riemann, cioè tali che la funzione che vale 1 nell'insieme e 0 fuori è integrabile]

Proprietà delle funzioni integrabili

L'insieme delle funz. int. secondo Riemann è uno sp. vett. e l'integrale è un'applic. lineare, cioè

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (f+g) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2} g dx dy$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} c \cdot f(x,y) dx dy = c \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy$$

Inoltre valgono due proprietà

$$\text{MONOTONIA : } f \leq g \Rightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) dx dy$$

$$\text{e in particolare } \left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| dx dy$$

$$\text{ADDITIVITÀ risp. zona integr. } \iint_{A \cup B} f(x,y) dx dy = \iint_A \dots + \iint_B \dots$$

se $A \cap B = \emptyset$ [conseguenza dell'additività rispetto alla somma].