

Esercizio 1 $f(x, y) = x^2 + \sin(y^4) + x \arctan(y^2)$

④ L'origine è stazionaria? Di che tipo?

Taylor: $x^2 + y^4 + xy^2 + o((x^2 + y^2)^3)$ ← il termine successivo sarebbe $-\frac{1}{3}xy^6$

$$\sin(y^4) = y^4 + o(y^8) \quad \arctan(y^2) = y^2 + o(y^5)$$

Sicuramente $(0, 0)$ è stazionaria perché non ci sono termini lineari

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{semidefinita } > 0 \text{ (autovalori: } 0 \text{ e } 2)$$

$\rightsquigarrow (0, 0)$ non è p.to di max relativo (Hf dovrebbe essere ≤ 0)

$\rightsquigarrow$ restano aperti min / sella

Provo a parraggiare gli esponenti e vedo cosa succede

$x = u^2 \quad y = v$ o ancora meglio, visto che i quadranti problematici sono quelli con x negativo

$$x = -u^2 \quad y = v$$

$$\begin{aligned} f(-u^2, v) &= u^4 + \sin(v^4) - u^2 \arctan(v^2) \\ &= u^4 + v^4 - u^2 v^2 + o((u^4 + v^2)^2) \end{aligned}$$

Vediamo che succede in coord. polari

$$\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta) + o(\rho^4)$$

se fosse $\geq m > 0$ avrei finito

$$f(p \cos \theta, p \sin \theta) \geq m p^4 + o(p^4)$$

e questa ha un min. nell'origine

Per dimostrare che esiste $m > 0$ ci sono 2 modi

→ studio la funzione $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta$

→ completo i quadrati

$$\cos^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^4 \theta + \frac{3}{4} \sin^4 \theta$$

$$= (\cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta)^2 + \frac{3}{4} \sin^4 \theta$$

Questo per W ha un minimo raggiunto in un certo θ_0 .

Può essere < 0 il min? NO perché sono $\square$

Può essere $= 0$? NO perché dovrebbero esse $= 0$ sia $\sin^4 \theta_0$
sia $\cos^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0$,
cioè $\sin \theta_0 = \cos \theta_0 = 0$.

Conclusione: nelle variabili new la funzione f ha un min. loc. stretto in $(0,0)$ cioè esiste una palla centrata in $(0,0)$ in cui $f > 0$ tranne in $(0,0)$ dove vale 0.

La palla in (u,v) diventa un "televisore" in (x,y) .

② $\sup f$ in $\mathbb{R}^2 = +\infty$ [Basta fare $f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$]

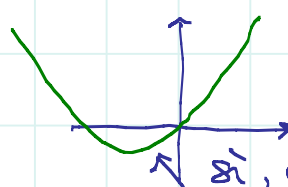
③ $f(x,y) = x^2 + \sin(y^4) + x \arctan(y^2)$

$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $f(x,y) < 0$?

Basta considerare $f(t, \sqrt[4]{\pi}) = t^2 + t \boxed{\arctan(\sqrt{\pi})}$
numero positivo

$$= t^2 + m t$$

con $m > 0$



sì, assume valori negativi

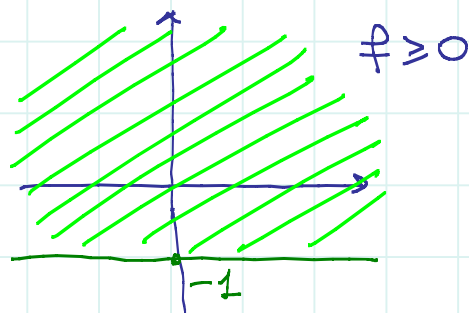
Esempio 2 $f(x,y) = x^2 + \sin(y^4) + x^2 \arctan(y)$

Taylor : $x^2 + y^4 + x^2 y + o((x^2 + y^2)^2)$

$\nabla f(0,0)$ e $Hf(0,0)$ sono le stesse di prima
Anche in questo caso in $(0,0)$ c'è un min. loc.

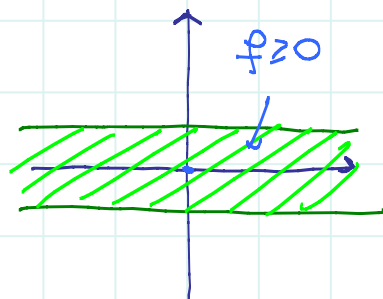
Sottodomanda: dimostrare che $x^2 + y^4 + x^2 y$ ha un min. loc. in $(0,0)$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0 \text{ sempre}} \underbrace{(1+y)}_{\geq 0 \text{ per } y \geq -1} + \underbrace{y^4}_{\geq 0 \text{ sempre}}$$



Tornando alla funzione iniziale

$$f(x,y) = \underbrace{x^2}_{\geq 0} \underbrace{(1 + \arctan y)}_{\geq 0 \text{ se } y \geq -\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\sin(y^4)}_{\geq 0 \text{ di sicuro in } |y| \leq \sqrt[4]{\pi}}$$



Inf/Sup su $\mathbb{R}^2$: $\sup = +\infty$ $f(t,0)$ oppure $f(t,t)$ con $t \rightarrow +\infty$

$\inf = -\infty$ $f(t, -2023)$ con $t \rightarrow +\infty$

$$\uparrow$$

$$1 + \arctan(-2023) < 0$$

Esempio 1 bis

$$f(x,y) = x^2 + \sin(y^4) + \underbrace{3x}_{\uparrow\uparrow} \arctan(y^2)$$

∇f e Hf sono i soliti nell'origine, ma ora è una sella

Prima: $x^2 + y^4 + x y^2$ $f(-t^2, t) = t^4 + t^4 - 3t^4 + o(t^4)$

Ora : $x^2 + y^4 + 3x y^2$ $= -t^4 + o(t^4)$

Esempio 3 $f(x, y, z) = x - y + z$

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 3, xy + z = 2 \}$$

A è compatto? Sì!

È chiuso per via degli $=$ e $\geq$

È limitato perché $x \in [0, 3], y \in [0, 3], z \in [0, 2]$

A è vuoto? NO [Ad esempio $(1, 2, 0) \in A$ oppure $(0, 3, 2) \in A$]

Idea 1 Sostituisco i vincoli $y = 3 - x$
 $z = 2 - xy = 2 - x(3 - x)$

→ studio $x - (3 - x) + 2 - x(3 - x) =$ parabola
per quali valori di x ? Deve succedere

$$y \geq 0 \quad \text{cioè } x \leq 3$$

$$x \geq 0 \quad \text{cioè } x \geq 0$$

$$z \geq 0 \quad \text{cioè } 2 - x(3 - x) \geq 0$$

$$z \leq 2 \quad \text{cioè } x(3 - x) \geq 0$$

Idea 2 Due moltiplicatori + i p.t. di taglio ($x=0, y=0, z=0$)
— 0 — 0 —