

Esercizio 1 $f(x, y) = \arctan(xy) - x^2y$

L'origine è staz. ? Se sì, di che tipo ?

Taylor di ordine 3:

$$f(x, y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \dots}}{xy} - x^2y + o(p^5) \quad \uparrow \quad (x^2y^2)^{5/2}$$

Ci dà che $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ (non ci sono termini lineari)

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det = -1 \leadsto \text{autov. : } + -$$

$\leadsto$ Forma indefinita
 $\leadsto (0, 0)$ p.to di sella

Inf / sup di $f(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$? $+\infty$ e $-\infty$!

$$f(t, t) = \arctan(t^2) - t^3 \quad \text{e poi usando } t \rightarrow \pm\infty$$

Alternativa $f(1, t) = \arctan t - t$ e ancora $t \rightarrow \pm\infty$

Inf / sup su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$? $f(x, y) = \arctan(xy) - x^2y$

Inf = $-\infty$ perché è lecito usare $f(t, t)$ con $t \rightarrow +\infty$

Cosa possiamo dire del sup ? Intanto è > 0 , perché

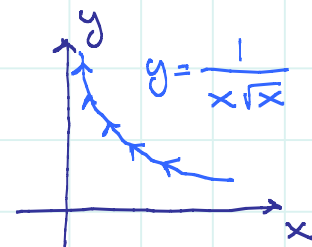
$$f(t, t) = \arctan(t^2) - t^3 = t^2 + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

quindi $f(t, t) > 0$ per $t > 0$ piccolo $\Rightarrow f$ assume anche valori positivi. Stima banale $f(x, y) < \frac{\pi}{2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{I}$ quadrante

Per dire che $\sup = \frac{\pi}{2}$, basta un sequ. che tenda a $\frac{\pi}{2}$

Cosa serve ? xy grande $x^2y \sim 0$

$$f\left(\frac{1}{t^2}, t^3\right) = \arctan(t) - \frac{1}{t} \quad \text{e poi mandando } t \rightarrow +\infty$$



Esempio 2 Inf / sup di $f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6$
nell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1\}$$

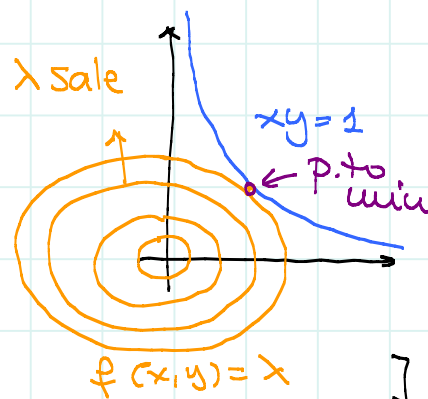
A è compatto? È chiuso perché c'è l' = nella definizione
Non è limitato perché

$$x = n \quad y = \frac{1}{n} \quad z = 1 \quad n \geq 1 \text{ intero}$$

sta nell'insieme e la sua norma $\sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2} + 1} \rightarrow +\infty$

Sup = $+\infty$ Basta fare $f(n, \frac{1}{n}, 1)$ per $n \rightarrow +\infty$

[Allenamento : se fosse $f(x, y) = x^2 + y^4$
con $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\}$



Ci aspettiamo che anche in $\mathbb{R}^3$ il min. esista.

Proviamo con Weierstrass generalizzato. Serve che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y,z) \in A}} f(x, y, z) = +\infty$$

Questo è vero pure su tutto $\mathbb{R}^3$ (posso porggiere gli esponenti,
oppure osservare che

$$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + z^6 \geq x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$\uparrow y^4 \geq y^2 - 1, \quad z^6 \geq z^2 - 1$

[Fatto generale: $x^2 \leq x^4 + 1$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$. Idem con altre potenze più grandi di 2 a dx]

W. generalizzato ok $\Rightarrow$ esiste un

Lo cerchiamo con i moltiplicatori

1° sistema $\nabla g = 0, g = 0$ $g(x, y, z) = xyz - 1$

$$\begin{cases} yz = 0 \\ xy = 0 \\ xz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \leadsto \text{NO SOL.}$$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$

$$\begin{cases} 2x = \lambda yz & \cdot x & 2x^2 = \lambda & x = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} \\ 4y^3 = \lambda xz & \cdot y & 4y^4 = \lambda & y = \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}} \\ 6z^5 = \lambda xy & \cdot z & 6z^6 = \lambda & z = \sqrt[6]{\frac{\lambda}{6}} \\ xyz = 1 \end{cases}$$

il loro prodotto deve fare 1

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda}{4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{\lambda}{6}} = 1$$

$\leadsto$ trovo $\lambda \leadsto$ trovo x, y, z ed è l'unico p.to di min.

— 0 — 0 —

Esercizio 3 $\inf / \sup f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$ in

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

① A non è compatto (è limitato, ma non chiuso)

② Indaghiamo $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

Brutal mode: $\frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \sim \frac{1 + xy - 1}{x^2 + y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} \leadsto \text{N.E.}$

Rigoroso $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$
 $\uparrow$ Analisi 1

③ Indaghiamo $\max/\min \{ f(x, y) : x^2 + y^2 = R^2 \}$

Questo esiste se $R > 0$ per W. Nella circ. abbiamo

$$f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{R^2}$$

quindi f avrà $\max/\min$ quando xy ha $\max/\min$

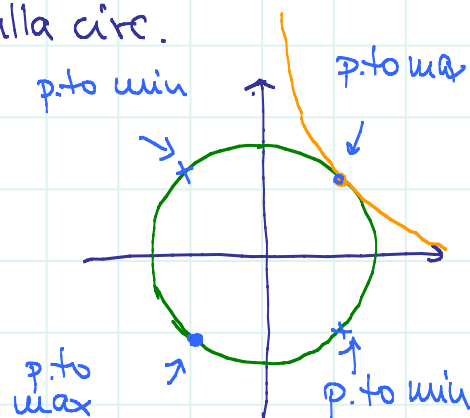
Quindi basta trovare $\max/\min$ di xy sulla circ.

Max quando $x = y = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$

Min quando $x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \quad y = \mp \frac{R}{\sqrt{2}}$

$$\text{Max} = \frac{e^{\frac{R^2}{2}} - 1}{R^2}$$

$$\text{Min} = \frac{e^{-\frac{R^2}{2}} - 1}{R^2}$$



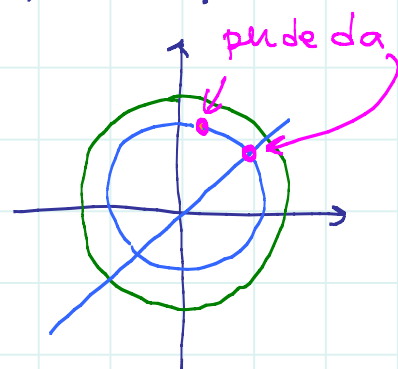
Questo discorso ci dice che per trovare $\inf/\sup$ basta restringersi ai p.ti con $x=y$ (per il $\sup$) e a quelli con $y=-x$ (per l' $\inf$.)

Quindi alla fine basta studiare le due funzioni

$$\varphi_1(t) = f(t, t) = \frac{e^{t^2} - 1}{2t^2} \quad \text{per il sup}$$

$$\varphi_2(t) = f(t, -t) = \frac{e^{-t^2} - 1}{2t^2} \quad \text{per l'inf.}$$

funzioni pari



Dove varia t ? $t \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

[Conetto dopo video]

— 0 — 0 —