

Taylor $\Rightarrow$ Studio locale dei p.ti stazionari

$$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \nabla f(0) = 0 \quad Hf(0) > 0$$

Allora 0 è p.to. di min. rel. per f

Dim. Scrivo Taylor di ordine 2. Osservo che si scrive come

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \\ &+ \langle \nabla f(0), x \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{x^t Hf(0) x}_{\text{forma quadratica associata alla matrice Hessiana}} \\ &+ o(\|x\|^2) \end{aligned}$$

$$= f(0) + \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + o(\|x\|^2)$$

Possiamo riscriverlo come

$$f(x) - f(0) = \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + o(\|x\|^2)$$

$$\geq \frac{1}{2} \underbrace{m}_{>0} \|x\|^2 + o(\|x\|^2)$$

$$= \|x\|^2 \left(\frac{m}{2} + \frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2} \right)$$

Ho usato che le matrici definite positive sono coercive

Per definizione di limite

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } \underbrace{\frac{o(\|x\|^2)}{\|x\|^2}}_{> -\varepsilon} \geq -\frac{m}{4} \quad \forall x \in B(0, r)$$

Otengo che

$$f(x) - f(0) \geq \|x\|^2 \left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4} \right)$$

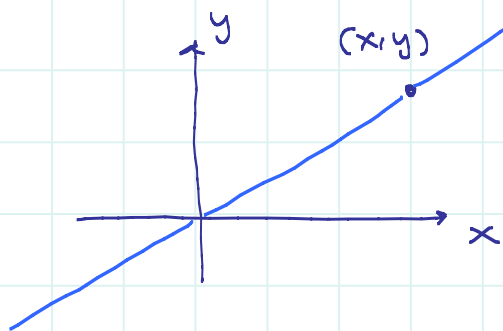
$$= \frac{m}{4} \|x\|^2 \geq 0 \quad \forall x \in B(0, r)$$

Questo mi dice che $f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in B(0, r)$, cioè
0 è p.to di min. loc. (la disug. è stretta se $x \neq 0$)
— o — o —

Taylor Lagrange in dim 2, dimostrazione parziale

$f(x, y)$. Fissati (x, y) costruisco

$$\varphi(t) := f(tx, ty)$$



Ora $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ quindi posso
applicare Taylor di Analisi 1:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} \varphi''(0)t^2 + \frac{1}{6} \varphi'''(c)t^3$$

(ci siamo fermati con $n=2$) Ora sostituisco $t=1$:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(1) & = & \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(0) + \frac{1}{6} \varphi'''(c) \\ \text{"} & & \text{"} \\ f(x, y) & & f(0, 0) \end{array} \quad c \in (0, 1)$$

$$\varphi'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain rule}}}{f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y}$$

$$\text{quindi } \varphi'(0) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= f_{xx}(tx, ty)x^2 + f_{xy}(tx, ty)xy + f_{yx}(tx, ty)yx + f_{yy}(tx, ty)y^2 \\ \varphi''(0) &= f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2 \\ &\text{e così via per induzione.} \end{aligned}$$

Quando vado a calcolare il resto, in questo caso

$$\frac{1}{6} \varphi'''(c)$$

le derivate terze di $f(x,y)$ me le ritrovo in (cx, cy) , che è un p.to del segmento che congiunge $(0,0)$ e (x,y) .

— o — o —

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f(0) = 0$, $Hf(0)$ indefinita.

Allora 0 non è max/min locale

Dim Per ipotesi

$$\exists v \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } v^t Hf(0) v > 0$$

$$\exists w \in \mathbb{R}^d \text{ t.c. } w^t Hf(0) w < 0$$

Scrivo Taylor di ordine 2:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2} x^t Hf(0) x + o(\|x\|^2)$$

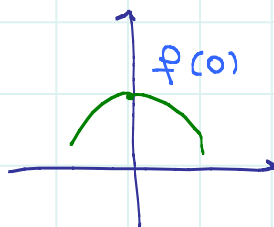
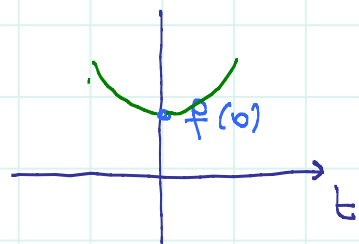
Considero $f(tv) = f(0) + \frac{1}{2} t^2 \boxed{v^t Hf(0) v} + o(t^2)$

> 0

e considero analogamente

$$f(tw) = f(0) + \frac{1}{2} t^2 \boxed{w^t Hf(0) w} + o(t^2)$$

< 0



— o — o —

Esercizio 1 $f(x,y) = x^2 + y^4 - 4xy$

Trovare i p.ti stazionari e classificarli

$$f_x(x,y) = 2x - 4y$$

$$f_y(x,y) = 4y^3 - 4x$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y^3 = x \end{cases} \leadsto y^3 = 2y \leadsto y(y^2 - 2) = 0$$

$$y = 0 \leadsto (0,0)$$

$$y = \sqrt{2} \leadsto (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$y = -\sqrt{2} \leadsto (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \text{Det} = -16 \leadsto \text{autov.} + - \\ \leadsto \text{indeterminata} \leadsto \text{sella}$$

$$Hf(\pm 2\sqrt{2}, \pm \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix} \leadsto \text{Det} = 48 - 16 > 0 \\ \text{Tr} = 26 \\ \leadsto \text{Autovalori: } ++ \\ \leadsto Hf > 0 \text{ (def. pos.)} \\ \leadsto \text{p.ti di min. loc.}$$

Versione alternativa del discorso: $f(x,y) = x^2 + y^4 - 4xy$

① L'origine è un p.to stazionario: f è il P_4 di se stessa e non ha termini di 2° grado $\leadsto (0,0)$ è stazionario

② $f(t,0) = t^2 \leadsto$ vede un min in 0

$$f(t^4, t^2) = t^8 + t^8 - 4t^6 \leadsto \text{vede un max in 0}$$

$$f(t,t) = t^2 + t^4 - 4t^2 = -3t^2 + t^4 \leadsto \text{vede un max in 0}$$

③ Quanto fa il limite all'infinito

Mi metto nel primo quadrante e pareggio gli esponenti

$$x = u^2$$

$$\leadsto f(u^2, v) = u^4 + v^4 - 4u^2v$$

$$y = v$$

Ora

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} f(u^2, v^2) = +\infty$$

$$\text{perché in polari verrebbe } \geq ur^4 - 4r^3$$

④ Per W. generalizzato ora sappiamo che f ammette minimo. Quindi ci sono altri p.ti stazionari oltre all'origine e non saranno sugli assi perché sugli assi $f \geq 0$ ed il minimo è negativo (in $(0,0)$ vale 0 e si può scendere).

A questo p.to i p.ti stazionari di minimo sono almeno 2

$$f(x, y) = f(-x, -y).$$

Quindi gli altri due sono per forza minimi.

— 0 — 0 —