

POLINOMI DI TAYLOR

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia n un intero ≥ 0 .

Allora sotto opportune ipotesi esiste un unico polinomio $P_n(x)$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$\uparrow$ resto

Il polinomio è dato dalla formula

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$\nwarrow$ derivata k-esima

ed è l'unico polinomio tale che $P_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ per ogni $k=0, 1, \dots, n$ (cioè le derivate di f e di P_n in 0 coincidono fino all'ordine k).

Il resto è piccolo nel senso che

$$R_n(x) = o(x^n) \text{ per } x \rightarrow 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$$

(RESTO DI PEANO)

oppure nel senso che

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\nwarrow$ p.to misterioso compreso tra 0 e x che dipende da x

(RESTO DI LAGRANGE)

Nel caso di p.to base $\neq 0$ la formula è

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

$\nwarrow$ alla Peano

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$\nwarrow$ tra x_0 e $x_0 + h$

Analisi 2

Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Allora sotto opportune ipotesi

$$f(x) = \underbrace{P_n(x)}_{\substack{\text{polinomio di grado } \leq n \\ \text{in } d \text{ variabili}}} + R_n(x)$$

dove $P_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ le cui derivate coincidono in 0 (origine) con quelle di f fino all'ordine n .
Il polinomio è dato dalla formula

$$P_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

dove abbiamo assunto il linguaggio dei multi-indici

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \quad \alpha_i \geq 0 \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$$

Il resto è piccolo

→ nel senso che $R_n(x) = o(\|x\|^n)$ cioè

$$\lim_{\boxed{x \rightarrow 0}} \frac{R_n(x)}{\|x\|^n} = 0$$

↑
limite in d variabili

PEANO

$$\rightarrow \text{nel senso che} \quad R_n(x) = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{D^\alpha f(c)}{\alpha!} x^\alpha$$

dove c è un p.to misterioso che sta sul segmento che congiunge l'origine con il p.to x .

Esempio 1 $f(x, y)$

$$f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

$(0, 0)$
 $(1, 0)$ $(0, 1)$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2!0!} f_{xx}(0, 0) x^2}_{(2, 0)} + \underbrace{\frac{1}{1!1!} f_{xy}(0, 0) xy}_{(1, 1)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{0!2!} f_{yy}(0, 0) y^2}_{(0, 2)}$$

$$+ \frac{1}{3!0!} f_{xxx}(\dots) x^3 + \frac{1}{2!1!} f_{xxy}(\dots) x^2 y$$

$$+ \frac{1}{1!2!} f_{xyy}(\dots) x y^2 + \frac{1}{0!3!} f_{yyy}(\dots) y^3$$

+ ...

$$= f(0, 0)$$

ordine 0

$$+ f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

ordine 1

$$+ \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$

$$+ \frac{1}{6} [f_{xxx}(\dots)x^3 + 3f_{xxy}(\dots)x^2 y + 3f_{xyy}(\dots)xy^2 + f_{yyy}(\dots)y^3]$$

[Da "fisici" all'ordine k c'è $\frac{1}{k!} (x\partial_x + y\partial_y)^k$

Come si calcolano "davvero" i polinomi di Taylor?

Come ad Analisi 1, usando gli sviluppi elementari.

Esempio $f(x, y) = x \sin y$ $n = 7$

$$f(x, y) = x \left(y - \frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{120} y^5 + o(y^6) \right)$$
$$= xy - \frac{1}{6} xy^3 + \frac{1}{120} xy^5 + \underbrace{o(y^6)}_{o((x^2+y^2)^{7/2})}$$

$$f(x,y) = \sin(xy) \quad n=7$$

$$\sin t = t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4) \quad \text{pongo } t=xy \text{ e ottengo}$$

$$f(x,y) = xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + o(p^8)$$

$$= xy - \frac{1}{6}x^3y^3 + \underbrace{o(p^8)}_{\uparrow} \leftarrow o((x^2y^2)^{3/2})$$

qui sarebbe il termine successivo x^5y^5 quindi di ordine 10, quindi posso mettere $o(p^a)$ per ogni $a < 10$.

$$g(x,y) = (x+y^2) \cos(xy) \quad n=5$$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \dots$$

$$g(x,y) = (x+y^2) \left(1 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o(p^7) \right)$$

$\uparrow$ il termine successivo sarebbe x^4y^4

$$= \underbrace{x + y^2 - \frac{1}{2}x^3y^2}_{P_5(x,y)} + o(p^5)$$

Quanto vale $g_{xxyy}(0,0)$? Vale 0!

Basta osservare che $P_5(x,y) = \dots + \underbrace{\frac{g_{xxyy}(0,0)}{2!2!} x^2y^2}_{\text{multiindice } (2,2)} + \dots$

Nel nostro polinomio x^2y^2 "non c'è", quindi la derivata deve essere 0!!!

Quanto vale $g_{xyxy}(0,0)$?

Tanto lo stesso di $g_{xxyy}(0,0)$

$$\begin{aligned} P_5(x,y) &= \dots + \frac{g_{xxyy}(0,0)}{3!2!} x^3 y^2 + \dots \\ &= \dots - \frac{1}{2} x^3 y^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } g_{xxyy}(0,0) = -\frac{1}{2} 3!2! = -6 \quad \ddot{\smile}$$

$$f(x,y) = x \sin y \quad m=2$$

$$f(x,y) = xy + o(p^2) \quad [\text{volendo } xy + o(p^3)]$$

Da questo vedo che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ (non ci sono termini di grado 1)

$$\text{e } Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— 0 — 0 —