

Derivate successive in più variabili

Esempi $f(x, y) = x^2y + y^3$

$$f_x(x, y) = 2xy$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 3y^2$$

$$f_{xx}(x, y) = 2y$$

$$f_{xy}(x, y) = 2x$$

$$f_{yx}(x, y) = 2x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f_{xxx}(x, y) = 0 \quad f_{xxy}(x, y) = 2$$

e così via.

A priori, per una funzione di 2 variabili, le derivate di ordine k sono 2^k (più in generale d^k se siamo in d variabili)

Notazione

$$f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = D_{xxy} f$$

Teorema di inversione dell'ordine di derivazione

Sotto vari set di ipotesi ragionevoli, vale che

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Corollario Se calcolo una qualunque derivata mista, ad esempio

f_{xyxxy} , il risultato NON dipende dall'ordine in cui lo eseguito le operazioni (sotto ipotesi ragionevoli), quindi è come fare f_{xxxxy} . [Vale con qualunque numero di variabili]

Conseguenza Per una funzione di 2 variabili, le derivate di ordine k sono $k+1$ (dipende solo da quante volte ho derivato risp. a x)

Ordine 4: $f_{xxxx}, f_{xxxxy}, f_{xxxyy}, f_{xyyyy}, f_{yyyyy}$

Due set di ipotesi ragionevoli:

- f_{xy} e f_{yx} esistono in un intorno di (x_0, y_0) e sono continue nel p.to (x_0, y_0)
- f_x e f_y sono differenziabili in (x_0, y_0)

Esistono esempi in cui non vale l'inversione, ad esempio

$$f(x, y) = \frac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2} \cdot xy \quad f(0, 0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) = a$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(0, t) = b$$

Facendo i conti si verrebbe che le derivate f_{xy} e f_{yx} in $(0, 0)$ sono una a e una b .

Succede sempre se moltiplico per xy una $g(x, y)$ come sopra.

Analisi 1 Sia $x_0 \in (a, b)$, sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 .

Supponiamo che $f'(x_0) = 0$ (p.to stazionario)

Allora valgono le seguenti implicazioni.

$$(i) \quad x_0 \text{ p.to di min. loc.} \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$$

$$(ii) \quad \text{" max " } \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$$

$$(iii) \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ p.to di min. loc.}$$

$$(iv) \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{" max loc.}$$

$$(v) \quad f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{BOH}$$

[Pensare agli esempi x^4 , $-x^4$, x^5 che hanno tutti $f'(0) = f''(0) = 0$]

Ad Analisi 2 entra in gioco la matrice HESSIANA. In due variabili

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x, y) & u_{xy}(x, y) \\ u_{yx}(x, y) & u_{yy}(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{Matrice simmetrica}$$

Analogamente, in d variabili $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$(Hf)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \leftarrow \text{Matrice simmetrica } d \times d$$

Analisi 2 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sia x_0 p.to interno ad Ω , e sia f di classe C^2 in un intorno di x_0 .

Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$ (x_0 p.to stazionario).

Allora si hanno le seguenti implicazioni.

(i) x_0 p.to di min. loc. per $f \Rightarrow Hf(x_0) \geq 0$
(semidefinita positiva)

(ii) $\dots \max \dots \Rightarrow Hf(x_0) \leq 0$

(iii) $Hf(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc. per f
(definita positiva)

(iv) $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow \dots \max \dots$

(v) $Hf(x_0)$ è indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max né min locale

(vi) $Hf(x_0) \geq 0$ oppure $Hf(x_0) \leq 0 \Rightarrow \text{BOH}$

Esempio 1 $f(x, y) = x \sin y$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$f_x(x, y) = \sin y \quad f_y(x, y) = x \cos y$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0) \leadsto \text{stazionario}$$

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x \sin y \end{pmatrix}$$

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = -1 \Rightarrow \text{autovalori } + -$$

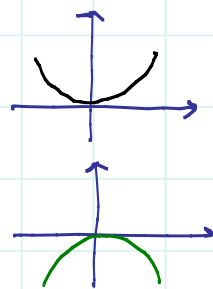
$\Rightarrow Hf(0, 0)$ indefinita $\Rightarrow (0, 0)$ non è né p.to di max loc., né p.to di min. loc.

In questo caso è un p.to di sella

[Geometricamente: c'è un semino che vede un max e un semino che vede un min]

$$f(t, t) = t \sin t = t^2 + o(t^2)$$

$$f(t, -t) = t \sin(-t) = -t^2 + o(t^2)$$



Esempio 2 $f(x, y) = x^4 - \sin^2 y$

$$f_x(x, y) = 4x^3$$

$$f_y = -2 \sin y \cos y$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

p.to staz.

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2\cos^2 y + 2\sin^2 y \end{pmatrix}$$

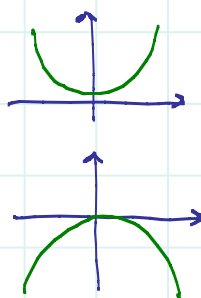
$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \leq 0 \quad (\text{semidef. neg.})$$

$\Rightarrow$ BOH!!! (dalla sola Hessiana non possiamo dedurre quasi nulla)

Dobbiamo inventarci altro!

$$f(t, 0) = t^4$$

$$f(0, t) = -\sin^2 t$$



Anche in questo caso l'origine è né max, né min (una specie di sella)

Esempio 2bis $f(x, y) = -x^4 - \sin^2 y$. Come prima $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$
e

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Ora } (0, 0) \text{ è un p.to di max. Loc. e globale}$$

Basta osservare che $f(0, 0) = 0 \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Da $Hf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ possiamo solo escludere il min. Loc.
— 0 — 0 —