

Ripasso forme quadratiche

In $\mathbb{R}^2$ $q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ (a, b, c dati)

In $\mathbb{R}^3$ $q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$

Con una notazione più compatta

$$q(x) = x^t A x$$

dove x è un vettore colonna con d componenti e A è una matrice $d \times d$ simmetrica. Ad esempio

$$q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Guardando il segno, una forma quadratica si dice

→ definita positiva se $q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$ con $x \neq 0$

→ " negativa < 0 "

→ semidefinita positiva se $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

→ " negativa $\leq$ "

→ indefinita se non ricade nei precedenti, cioè

$\exists x_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $q(x_0) > 0$ ed $\exists y_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $q(y_0) < 0$.

Achtung! Definita positiva $\Rightarrow$ semidefinita positiva

Ci sono almeno 4 modi per scoprire in quale caso si ricade.

- Quando gli autovalori della matrice (che sono reali per forza)
- SOS (Sum of Squares). Ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni di primo grado lin. indip.

$$\begin{array}{ccccc} \# \text{ espressioni con il } + & = & \# \text{ autovalori } > 0 \\ \text{"} & - & \text{"} & < 0 \end{array}$$
- Sylvester (permanenze / variazioni nel segno dei minori sulla diagonale)
- Cartesio (segno dei coeff. del pol. caratteristico)

Esempi $q(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 6xy$ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$\text{Det} = -1 \leadsto \text{Autov} = + - \leadsto \text{indefinita}$

Analisi 2 $\text{Sup} = +\infty$ $\text{Inf} = -\infty$

Sia (a, b) t.c. $q(a, b) < 0$. Allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(ta, tb) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 q(a|b) = -\infty \quad \text{☺}$$

$$q(x,y) = x^2 + 26y^2 - 10xy \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 26 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} = 1 \leadsto \text{Autov. } ++ \text{ oppure } --$

Na $\text{Tr} = 26 \leadsto$ souo ++ $\leadsto$ definita positiva

$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$ $\text{Det}_{2 \times 2} = -10$ $\text{Det}_{3 \times 3} = -2 + 3 + 3 + \cancel{-18} = -11$	$\begin{matrix} + & + & - \\ p & v & p \end{matrix}$ Autovalori $+$ $+$ $-$
--	---	--

Def. Una forma quadratica si dice **coerciva** se

$$\exists m_0 > 0 \quad \text{t.c.} \quad q(x) \geq m_0 \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Oss. Una forma quadratica coerciva è per forza def. pos. e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty$$

(per confronto)

Teorema Definita positiva $\Rightarrow$ coerciva.

Dim. di Analisi 2 Osserviamo che una forma quadratica è 2-omogenea, cioè

$$q(t\vec{v}) = t^2 q(\vec{v})$$

Pongo $m_0 := \min \{ q(x) : \|x\| = 1 \}$

bordo della palla = insieme compatto

Dico che $m_0 > 0$ se q è def. positiva. A questo p.to avrei concluso perché

$$q(x) = q\left(\underbrace{\|x\|}_t \underbrace{\frac{x}{\|x\|}}_{\text{sul bordo della palla}}\right) = \|x\|^2 q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\|^2 \cdot m_0$$

(se $x=0$ non c'è nulla da dimostrare)

Ora $m_0 = q(v_0)$ con $\|v_0\| = 1$ e quindi, essendo la forma definita positiva, per forza $m_0 > 0$.

Dim. di Algebra Lineare Supponiamo che la matrice sia diagonale. Allora

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_d x_d^2 \geq \underbrace{\min\{\lambda_i\}}_{m_0} \cdot \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_d^2)}_{\|x\|^2}$$

Quindi SE la matrice è diagonale e definita positiva, allora la forma è coerciva e $m_0 = \min$ degli autovalori

In generale, per il teorema spettrale esiste M tale che

$$M^t A M = D$$

$\uparrow$
diagonale

$$\text{e } \underbrace{M^t M = Id}_{M \text{ ortogonale}}$$

Ora

$$\begin{aligned} q(x) &= x^t A x \\ &= x^t M D M^t x \\ &= (M^t x)^t D (M^t x) && \text{pongo } M^t x = y \\ &= y^t D y \\ &\geq m_0 \|y\|^2 \\ &= m_0 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Quindi ci serve che $\|y\|^2 = \|x\|^2$, il che è vero perché M è ortogonale:

$$\|y\|^2 = y^t y = \underbrace{(M^t x)^t}_{\text{def. di } y} M^t x = x^t M M^t x = x^t x = \|x\|^2$$

Oss. Se calcoliamo $\min \{q(x) : \|x\| = 1\}$ con i mult. di Lagrange, i candidati sono gli autovettori e i corrispondenti moltiplicatori sono gli autovalori.

— o — o —