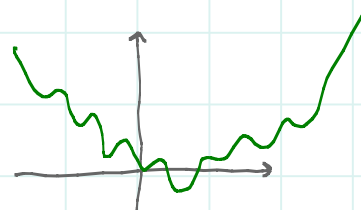


Teorema di WEIERSTRASS generalizzato

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

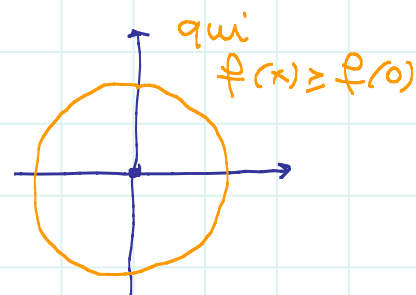


Allora $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ esiste.

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c.

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ esiste.



Dim Per definizione di limite

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq f(0) \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

Considero $m := \min \{f(x) : x \in B(0, R)\}$

$\uparrow$
esiste per w. classico

$\uparrow$
chiusa

Dico che m è il minimo su tutto $\mathbb{R}^d$. Infatti

→ se $\|x\| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ perché $x \in B(0, R)$

→ se $\|x\| > R$, allora per la scelta di R

$$f(x) \geq f(0) \geq m$$

$\uparrow$
perché 0 è un competitor
per la scelta di m .

— 0 — 0 —

Altra possibile variante Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che

(i) $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ [basta in realtà $\limsup \leq 0$]

(ii) esiste $x_0 \in \mathbb{R}^d$ t.c. $f(x_0) > 0$. [basta in realtà $f(x_0) \geq 0$]

Allora esiste $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R}^d \}$.

Dim. Come prima

$\exists R > 0$ t.c. $f(x) < \underbrace{f(x_0)}_{\substack{\text{stretto} \\ \downarrow \\ \text{è nella def. di limite.}}}$ $\forall x$ con $\|x\| \geq R$

Come prima poniamo

$$M := \max \{ f(x) : x \in B(0, R) \}$$

e dimostriamo che è max ovunque. Infatti

→ se $\|x\| \leq R$ allora $f(x) \leq M$ per def. di M

→ se $\|x\| > R$, allora

$$f(x) \leq f(x_0) \leq M$$

$\uparrow$ scelta di R $\uparrow$ x_0 è un competitor per la def. di M

Nell'ultimo passaggio serve che $x_0 \in B(0, R)$, perché fuori dalla $f(x) < f(x_0)$

— o — o —

Variante indebolendo (ii) chiedendo solo $f(x_0) \geq 0$.

Bisogna distinguere due casi.

① Se $f(x) > 0$ da qualche parte, allora posso trovare un $f(x_0) > 0$ e procedo come prima.

② Se $f(x) \leq 0$ sempre, ma allora x_0 con $f(x_0) = 0$ è p.to di max gratis.

— o — o —

Esempio 1 Inf / Sup / Max / Min su tutto $\mathbb{R}^2$ di

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$$

Osserviamo che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$

$$0 \leq |f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)| \leq \frac{\rho |\cos \theta|}{\rho^2 + 1} \leq \boxed{\frac{\rho}{\rho^2 + 1}} \underset{\downarrow 0}{}$$

Inoltre $f(2, 3) > 0$, quindi per la variante di prima esiste max.

Allo stesso modo $f(-2, 3) < 0$, e come prima si dimostra che esiste min.

Ora cerchiamo max/min indagando tra i p.ti stazionari.

$$f_x(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + 1}{(\quad)^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{x(-2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$

$$xy = 0 \begin{cases} \nearrow x = 0 \leadsto \text{guai nella 1^a} \\ \searrow y = 0 \leadsto x = \pm 1 \leadsto (\pm 1, 0) \end{cases}$$

Conclusione: $(1, 0)$ p.to di max, $(-1, 0)$ p.to di min.
 o o

Esercizio (Hard Hard)

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ .

Supponiamo che f abbia due p.ti di min. assoluto.

Possiamo concludere che f ha altri p.ti stazionari?

Esempio 2 Inf (sup / max / min in $\mathbb{R}^2$ di
 $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Osseviamo che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^4 (\underbrace{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}_{\geq m_0 > 0}) - 4\rho^2 \cos \theta \sin \theta \geq \boxed{m_0 \rho^4 - \rho^2}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Quindi gratta

→ sup = $+\infty$ e max non esiste

→ min esiste per W. generalizzato

Per trovare min cerco i p.ti stazionari

$$f_x = 4x^3 - 4y$$

$$f_y = 4y^3 - 4x$$

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

$$x^3 - x = 0 \leadsto x(x^2 - 1) = 0$$

$$x=0 \quad x=1 \quad x=-1$$

$$(0,0)$$

$$(1,1)$$

$$(-1,-1)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(1,1) = f(-1,-1) = -2$$

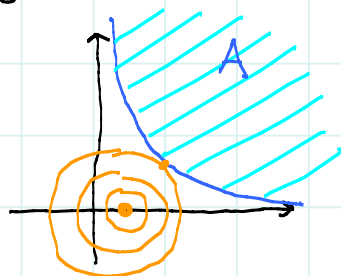
$\uparrow$
min

Esempio 3

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy \geq 1\}$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x$$

$$\sup = +\infty \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = +\infty$$



Min esiste perché $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi

in A a maggior ragione.

A quel p.to lo posso cercare come sempre

— o — o —