

Più moltiplicatori di Lagrange

Setting : $D \subseteq \mathbb{R}^d$

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$V = \{x \in D : g(x) = 0\}$$

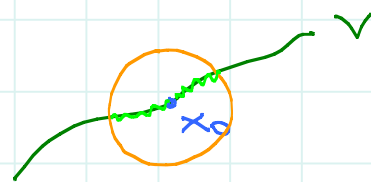
$\uparrow$ k equazioni $g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$x_0 \in D$ si dice p.to di max/min locale per f ristretta a V se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V \cap B(x_0, r) \quad (\text{max})$$

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{"} \quad (\text{min})$$



Teorema Setting come sopra. Supponiamo f e g di classe C^1 in D .

Allora succede almeno una di queste cose

(1) $Jg(x_0)$ ha RANGO $\leq k-1$ (al max può essere k)

(2) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ numeri reali t.c.
 $\uparrow$ moltip. di LAGRANGE

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

cioè $\nabla f(x_0)$ è comb. lin. di $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$

Operativamente I candidati p.ti di max/min si trovano risolvendo

1° sistema $g(x) = 0$

$\uparrow$
 k equazioni

$$\text{Rango}(Jg(x)) \leq k-1$$

$\uparrow$ impongo che tutti i minori di ordine k siano 0

$\uparrow$
una marea di equazioni (quante?)

2° sistema $g(x) = 0$

$\rightarrow k$ equazioni

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla g_1(x) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x) \rightarrow d \text{ equazioni}$$

$d+k$ incognite (comp. di x più k moltiplicatori)

(tante equ. quante sono le incognite).

Oss. La condizione $\text{Rango } J(x_0) = k$, cioè il max possibile, assicura che V è "fatto bene" in una finestra intorno a x_0
grafico di una funzione di $d-k$ variabili

Moralmente: ogni equazione che mettiamo fa scendere di uno la dimensione di V .

Esempio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + z^2 = 5, x + y - z = 0\}$
max/min su V di $f(x, y, z) = x - z$

$V =$ ellissoide $\cap$ piano = curva

V è limitato (contenuto nell'ellissoide) e chiuso (ci sono gli =)

$\Rightarrow V$ è opt. $\Rightarrow$ max e min esistono.

V è "solo bordo" quindi stas. e sing. interni NON HANNO SENSO.

Uso moltiplicatori con $g_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 5$ $k=2$
 $g_2(x, y, z) = x + y - z$

1° sistema

$$Jg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Jg ha rango ≤ 1 se si annullano i minori di ordine 2

$$\left\{ \begin{array}{l} -2y - 2z = 0 \quad \leadsto \quad z = -y \\ -4x - 2z = 0 \quad \leadsto \quad z = -2x \\ 4x - 2y = 0 \quad \leadsto \quad y = 2x \end{array} \right\} \text{ sostituisco in } g_2 = 0$$
$$\begin{array}{l} x + 2x + 2x = 0 \\ \downarrow \\ x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \\ \downarrow \\ \text{incompatibili con } g_1 = 0 \end{array}$$

2° sistema $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x + \mu \\ 0 = 2\lambda y + \mu \\ -1 = 2\lambda z - \mu \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases}$$

1° + 3°: $0 = 4\lambda x + 2\lambda z$

$$\leadsto \lambda(z + 2x) = 0$$

$$z = -2x$$

$$\downarrow 2^\circ + 3^\circ$$

$$-1 = 2\lambda(y + z)$$

$$\leadsto \lambda = 0$$

$\downarrow$
incompatibile
con 1° e 2° equ.

Fino a ora abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} z = -2x \\ y + z = -\frac{1}{2\lambda} \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\leadsto$ ricavo x, y, z
in funzione di λ

$\downarrow$
sostituisco in $g_1 = 0$
e trovo due possibili
valori di λ che
mi danno due
candidati

Devo trovare anche μ ? Posso farlo, ma non mi serve a nulla
perché alla fine nella f sostituisco solo x, y, z .

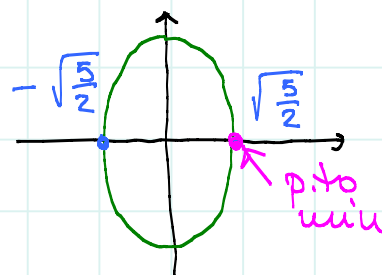
— o — o —

Osservazione (trucco di sostituzione del vincolo) [Provare con i
multiplic. per
esercizio]

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 5 \}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x$$

Voglio fare max/min di f in V



Osservo che $f(x, y) = x^2 + (5 - 2x^2) - 3x = -x^2 - 3x + 5$ in V

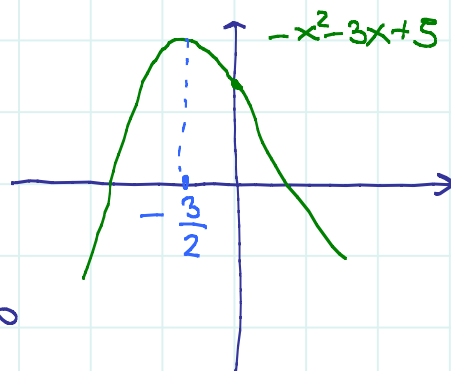
Quindi i max/min che sto cercando sono anche max/min
di $\varphi(x, y) = -x^2 - 3x + 5$ in V .

Quando siamo in V , x varia tra $\pm \sqrt{\frac{5}{2}}$,

quindi basta fare

max/min di $-x^2 - 3x + 5$ al variare di

x in $[-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}]$. Dalla figura il pto
di minimo è nell'estremo destro



Esempio 2 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$

max/min di $f(x, y, z) = x - y + z$

p.ti di taglio

$W \Rightarrow$ max e min esistono

staz. e stug. int. : $\emptyset$

Ci si riduce al bordo

$\rightarrow$ pezzo di paraboloide

($z - x^2 - y^2 = 0 \rightsquigarrow 1$ moltiplicatore)

$\rightarrow$ cerchio superiore ($z = 1, x^2 + y^2 \leq 1 \rightsquigarrow$ parametrizzo)

$\rightarrow$ p.ti di taglio descritti da due equazioni ($z = x^2 + y^2, z = 1$)
quindi tecnicamente lo posso trattare con 2 moltiplicatori.

— 0 — 0 —

