

Setting: $V \subseteq \mathbb{R}^d$ luogo di zeri di g
 $x_0 \in V$ p.to di max/min per f ristretta a V
 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

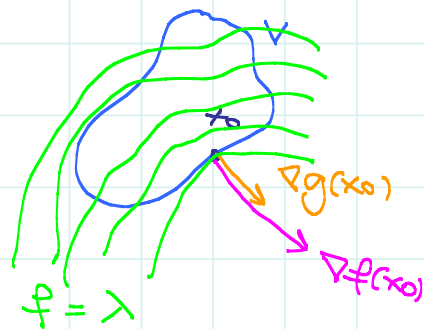
Allora succede almeno una delle 2: $\nabla g(x_0) = 0$
 $\exists \lambda$ t.c. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$

Non dimostrazione V è una linea di livello di g

$\nabla g(x_0)$ è $\perp$ alla linea di livello di g , cioè a V

Essendo x_0 p.to di max/min, ci aspettiamo che in x_0 la linea di livello di f sia tangente a V .

Ma allora $\nabla f(x_0)$ è $\perp$ alla linea di livello di f in x_0



Morale: $\nabla g(x_0)$ e $\nabla f(x_0)$ sono $\parallel$ in quanto $\perp$ alle rispettive linee di livello che sono tangenti

— o — o —

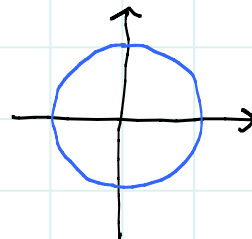
Nei p.ti di V dove $\nabla g \neq 0$, ci aspettiamo che l'insieme V sia "fatto bene"

Esempio $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

$\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq 0$ in ogni p.to della curva

$g(x, y) = x^2 + y^2$

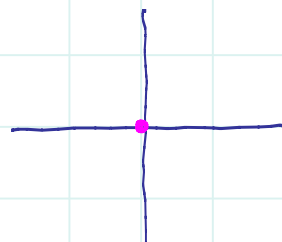
$V = \{(0, 0)\}$ e qui $\nabla g = 0$



$g(x, y) = xy$ Il luogo di zeri sono i due assi

$\nabla g(x, y) = (y, x)$ si annulla in $(0, 0)$ dove

il luogo di zeri è anomalo.



Teorema della funzione implicita (caso in $\mathbb{R}^2$)

(a Pisa, e solo a Pisa, si chiama anche teo. del Diui)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto, sia $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (esistono derivate prime continue), sia $(x_0, y_0) \in D$ tale che $g(x_0, y_0) = 0$ e $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora esistono $\delta > 0$ ed $\eta > 0$, ed esiste

$$\gamma: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$$

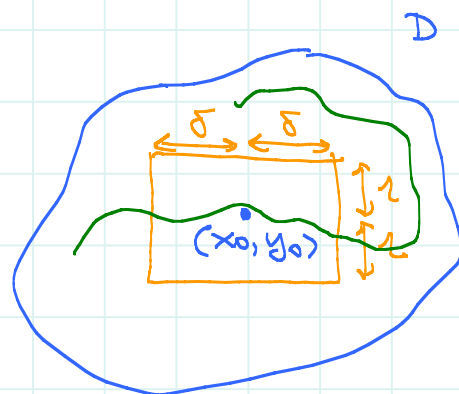
tale che, detto

$$V = \{ (x, y) \in D : g(x, y) = 0 \}$$

il luogo di zeri di g , vale che

$$V \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta] = \{ (x, \gamma(x)) : x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \}$$

Interpretazione geometrica: nella finestra intorno a (x_0, y_0) l'insieme V è il grafico della funzione γ , cioè ho ricavato y in funzione di x .



Inoltre la funzione γ è di classe C^1 e

$$\gamma'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$$

Esempio $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

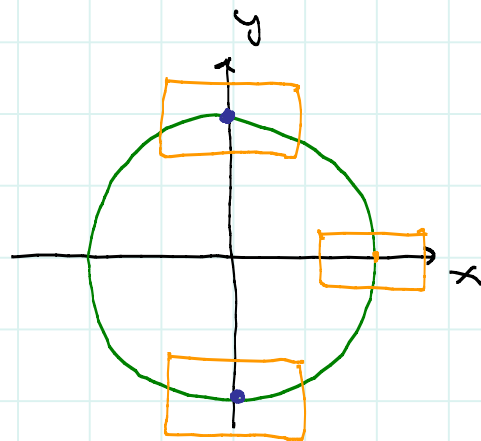
$$(x_0, y_0) = (0, 1) \quad \nabla g(0, 1) = (0, 2)$$

$$g_y(0, 1) \neq 0$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ nella finestra}$$

$$(x_0, y_0) = (0, -1) \rightsquigarrow g_y(0, -1) = -2 \neq 0$$

$$\rightsquigarrow y = -\sqrt{1 - x^2}$$



$$(x_0, y_0) = (1, 0) \rightsquigarrow g_y(1, 0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Non si applica il teorema

Dim. Per ipotesi $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Supponiamo $g_y(x_0, y_0) > 0$

Per continuità $g_y(x, y) > 0$ in una finestra del tipo

$$[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \times [y_0 - \tau, y_0 + \tau]$$

Essendo $g_y > 0$ avremo che

$$g(A) > 0 \quad \text{e} \quad g(B) < 0$$

Ma allora per continuità

esiste $\delta_1 \leq \delta_0$ t.c.

$$g(x, y_0 + \tau) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$$

$$g(x, y_0 - \tau) < 0 \quad \forall x \in \quad "$$

Su ogni segmento verticale che congiunge $(x, y_0 - \tau)$ a $(x, y_0 + \tau)$ la g è crescente (strett.) e passa da negativo a positivo, quindi si annulla esattamente una volta in un p.to $\gamma(x)$.

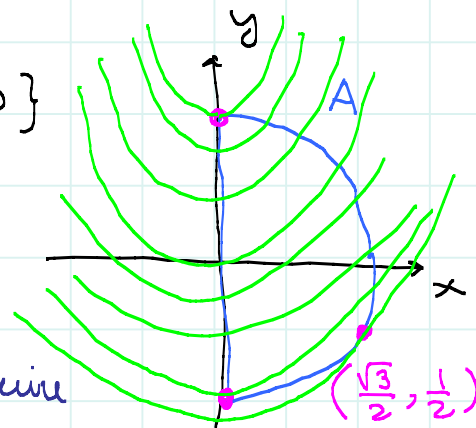
Oss. La dimostrazione si estende alla dimensione d semplicemente supponendo $\frac{\partial g}{\partial x_d}$ sia $\neq 0$ nel p.to in considerazione.

Per la formula per la derivata prima: vedi lez. successiva

Esempio $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0 \}$

$$f(x, y) = y - x^2$$

Max/min di f in A



L'insieme è cpt., f è cont. $\Rightarrow$ max e min esistono

Staz. interni: $\nabla f = 0 \quad (-2x, 1) = 0 \leadsto \emptyset$

Sing. interni: $\emptyset$

Ci si riduce al bordo, fatto da 2 pezzi

→ Segmento: $(0, t)$ con $t \in [-1, 1]$

$f(0, t) = t$ che ha max/min per $t=1$ e $t=-1$

→ $(0, 1)$ e $(0, -1)$

→ Pezzo di circ. Uso i mult. con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ma

• dovrò buttare via i candidati con $x < 0$

• devo sempre includere d'ufficio i "bordi dei bordi" o "p.ti di taglio"

1° sistema → NO SOLUZIONI

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ sistema } \sim \quad & \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$1^\circ \text{ eq } \sim \quad 2x(\lambda + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} & \swarrow \\ x &= 0 \end{aligned}$$

↓

$$y = \pm 1$$

↓

$$(0, \pm 1)$$

$$\begin{aligned} & \searrow \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$

↓ 2°

$$y = -\frac{1}{2}$$

↓ 3°

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

↓

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

↓

resta solo

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

— 0 — 0 —