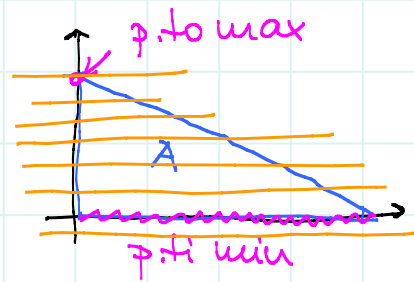


Esempio 1 $f(x,y) = y$

$A =$ triangolo di vertici $(0,0), (0,1), (2,0)$

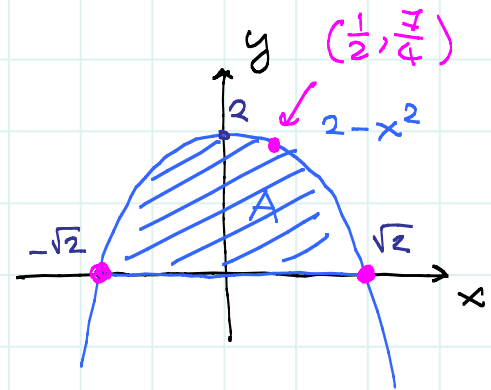
Max = 1 p.to di max: $(0,1)$

Min = 0 p.ti di min: tutto il segmento di estremi $(0,0)$ e $(2,0)$



Esempio 2 $f(x,y) = x+y$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2-x^2\}$



Weierstrass ok

① Staz. interni: $\emptyset$ $\nabla f(x,y) = (1,1)$

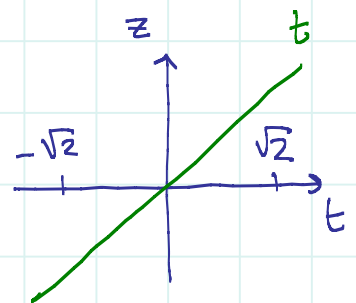
② Sing. interni: $\emptyset$ $\smile$

③ Bordo: fatto da 2 pezzi

→ SEGMENTO $(t,0)$ con $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Studio la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= f(t,0) \text{ con } t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ &= t \end{aligned}$$



Max e min stanno agli estremi del segmento

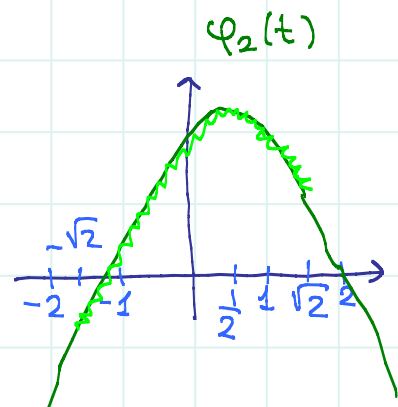
I primi 2 candidati sono $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$

→ PARABOLA $(t, 2-t^2)$ con $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Studio la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= f(t, 2-t^2) \text{ con } t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ &= t + 2 - t^2 \end{aligned}$$

$$\varphi_2'(t) = 1 - 2t \text{ no vertice in } t = \frac{1}{2}$$



I pti candidati per $\varphi_2(t)$ sono $t = \frac{1}{2}$ e quello con $t = -\sqrt{2}$ che corrisponde a

$$t = -\sqrt{2} \rightsquigarrow (-\sqrt{2}, 0)$$

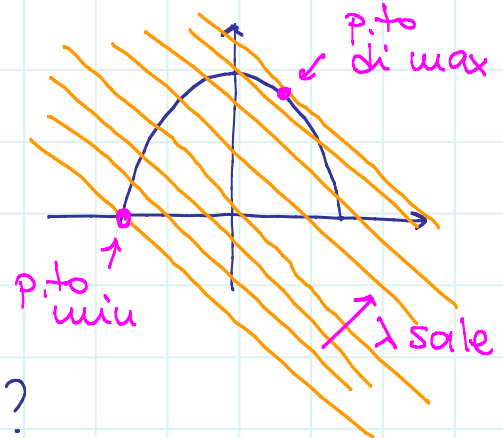
$$t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

In conclusione abbiamo 3 candidati: $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$
Ora sostituisco e vedo che succede

$$f(-\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2} \text{ min}$$

$$f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \text{ max}$$



Potremmo prevederlo con le linee di livello?

$$x+y = \lambda$$

— o — o —

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (caso speciale di 1 moltiplic.)

Def. Un insieme $V \subseteq \mathbb{R}^d$ si dice LUOGO DI ZERI se esiste $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$V = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) = 0\}$$

equazione di V

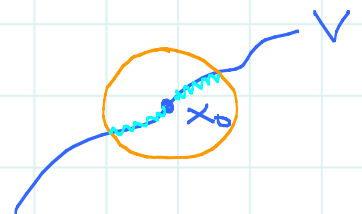
Def. (Pti di Max/min locale vincolato)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme qualunque (anche non luogo di zeri). Sia $x_0 \in V$. Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che x_0 è pto di min. loc. per f ristretta a V se

$$\exists r > 0 \text{ t.c. } f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in V \cap B(x_0, r)$$

Idem per il max



Teorema (Un moltiplicatore di Lagrange)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^d$ il luogo di zeri di una funzione $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Sia $x_0 \in V$ un p.to di max/min loc. per f ristretta a V

Supponiamo f e g regolari (derivate parziali continue ovunque)

Allora in x_0 succede almeno una di queste due cose

(1) $\nabla g(x_0) = 0$

(2) $\nabla g(x_0)$ e $\nabla f(x_0)$ sono paralleli, cioè

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

— o — ↑ moltiplicatore

Operativamente:

→ devo trovare i candidati p.ti di max/min sul bordo di A

→ spero che il bordo sia un insieme V luogo di zeri di una certa g

→ risolvo il 1° sistema
$$\begin{cases} \nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

cioè trovo i p.ti di V (cioè del bordo) in cui ∇g si annulla

→ risolvo il 2° sistema
$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

cioè trovo i p.ti di V in cui ∇f e ∇g sono paralleli.

Le soluzioni dei 2 sistemi sono i candidati cercati.

Oss. 1° sistema: $d+1$ equazioni
 d incognite

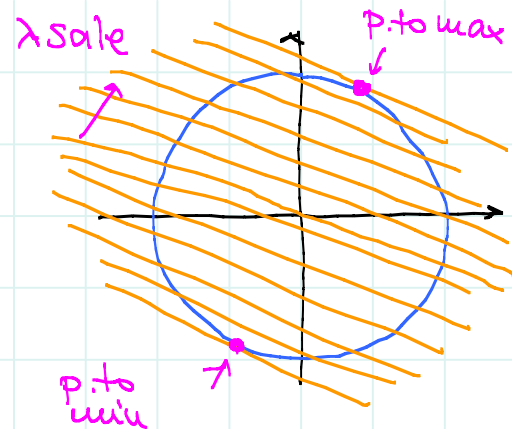
Capita spesso che non ha soluzioni

2° sistema: $d+1$ equazioni

$d+1$ incognite (c'è anche λ)

Capita spesso che ha numero finito di soluzioni

Esempio 1 $f(x,y) = x + 3y$
 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \}$



Weierstrass ok

Stazionari e singolari interni: $\emptyset$

Quindi studiamo il bordo

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{g(x,y)} = 0 \} = \text{luogo di zeri di } g$$

1° sistema
$$\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leadsto x = 0 \\ \leadsto y = 0 \\ \leadsto \text{NO SOL.} \end{matrix} \} \leadsto \text{incompatibili con la 3ª}$$

2° sistema
$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 0 \end{cases} \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 3 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\frac{2^\text{a equ}}{1^\text{a equ}} \Rightarrow y = 3x$ (posso dividere perché λ, x, y sono $\neq 0$)

$\leadsto$ sostituisco nella 3ª: $x^2 + 9x^2 = 1 \leadsto 10x^2 = 1$

$\leadsto x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \leadsto y = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$ (stesso segno di x)

Abbiamo 2 candidati: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right)$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $f = \sqrt{10}$ $f = -\sqrt{10}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 max min.

Oss. Potrei usare la parametrizzazione?

Sì, ad esempio con $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Dovrei studiare $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + 3 \sin t$
 con $t \in [0, 2\pi] \leadsto$ esercizio.

— 0 — 0 —