

- Domande:
- 1 - come calcolo le derivate parziali?
 - 2 - " " " " direzionali?
 - 3 - come stabilisco se f è diff. in un certo x_0 ?

- Risposte:
- 1 - come ad Analisi 1
 - 2 - Usando la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$
 - 3 - Usando il teorema del DIFFERENZIALE TOTALE

Teo (Diff. totale) (Enunciato generoso)

Supponiamo che tutte le derivate parziali di f

→ esistano in un intorno di x_0

→ siano continue in x_0

Allora f è differenziabile in x_0 .

Esempi di calcolo

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

$$f(x, y) = x^2 \cdot y^3$$

$$f(x, y) = x \sin y$$

$$f(x, y) = \cos(xy)$$

$$f(x, y) = \sin(x^2 y)$$

$$f(x, y) = y^2 \sin(xy)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}$$

$$f(x, y) = x^y$$

$e^{y \log x}$

$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_x(x, y) = 2x \cdot y^3$$

$$f_x(x, y) = \sin y$$

$$f_x(x, y) = -y \sin(xy) \quad f_y(\dots) = -x \sin(xy)$$

$$f_x = \cos(x^2 y) \cdot 2xy \quad f_y = x^2 \cos(xy)$$

$$f_x = y^3 \cos(xy)$$

$$f_y = 2y \sin(xy) + x y^2 \cos(xy)$$

$$f_x = \frac{1}{y^2}$$

$$f_y = -2 \frac{x}{y^3}$$

$$f_x = y x^{y-1}$$

$$f_y = x^y \cdot \log x$$

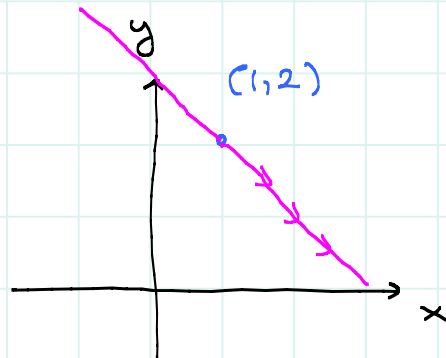
Derivate direzionali

$$f(x, y) = x^2 + xy^3$$

$$(x_0, y_0) = (1, 2)$$

$$v = (1, -1)$$

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$



$$f_x(x, y) = 2x + y^3$$

$$f_y(x, y) = 3xy^2$$

$$\nabla f(1, 2) = (10, 12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \langle (10, 12), (1, -1) \rangle = 10 - 12 = -2$$

Altro esempio

$$f(x, y) = xy$$

$$(x_0, y_0) = (2, -1)$$

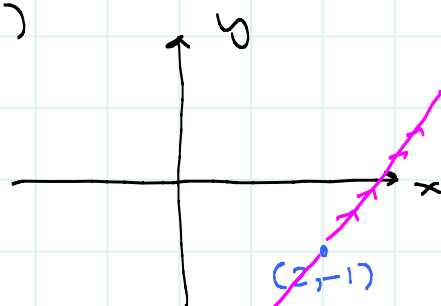
$$v = (1, 1)$$

$$f_x(x, y) = y \quad f_y(x, y) = x$$

$$\nabla f(x, y) = (y, x)$$

$$\nabla f(2, -1) = (-1, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2, -1) = \langle (-1, 2), (1, 1) \rangle = 1$$

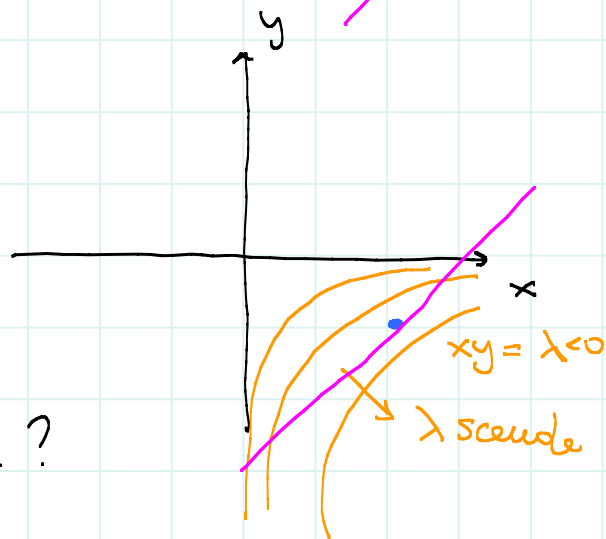


Significato geometrico del
gradiente

Limitandoci alle direzioni v

con $|v| = 1$, quando la

derivata direzionale risulta max/min?



$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

$$= |\nabla f(x_0)| \cdot \underbrace{|v|}_{=1} \cdot \cos \theta$$

$\uparrow$
angolo
compreso

→ Max quando $\theta = 0$, cioè v parallelo a $\nabla f(x_0)$ con stesso verso

→ min " $\theta = \pi$, " " " " con verso
opposto

Quindi: il gradiente è la direzione in cui andare (salire nel piano base) se si vuole salire con la massima pendenza.

Esercizio $f(x, y) = 2x^2y^3 - 3y$

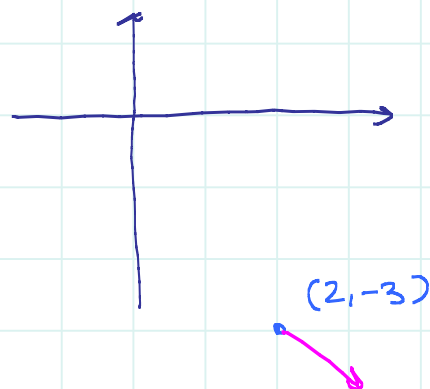
Metto una pallina nel p.to del grafico corrispondente a $(2, -3)$.
Dove va la pallina?

Risposta: in direzione opposta risp. al gradiente

$$f_x = 4xy^3 \quad f_y = 6x^2y^2 - 3$$

$$\nabla f(2, -3) = (-8 \cdot 27, 24 \cdot 9 - 3)$$

$$-\nabla f = (8 \cdot 27, -9 \cdot 24 + 3)$$



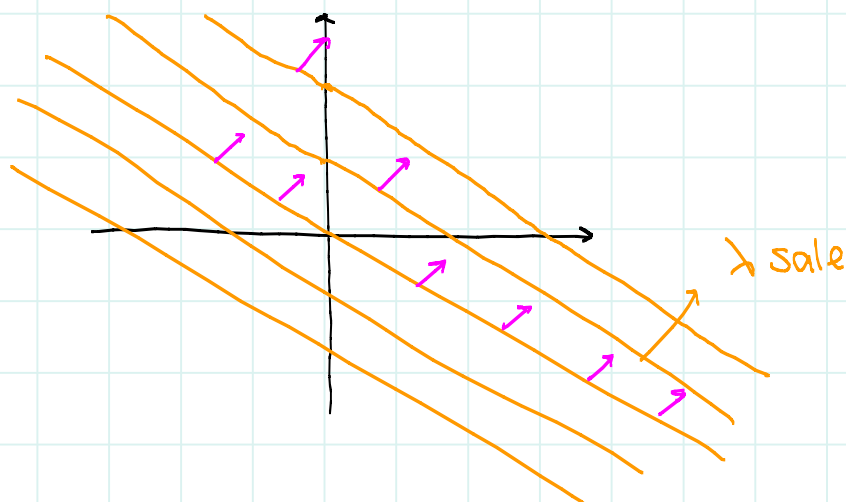
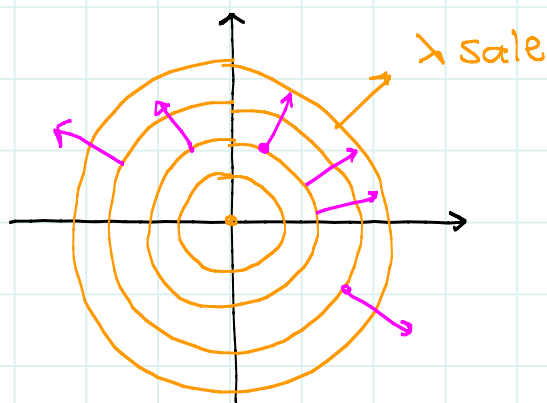
Oss. Le linee di livello sono $\perp$ rispetto al gradiente

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

$$\nabla f(x, y) = (2, 3)$$



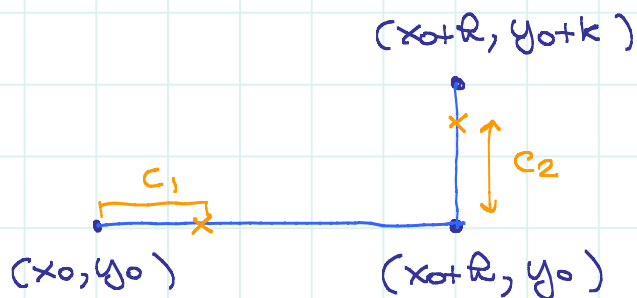
$$2x + 3y = \lambda$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{\lambda}{3}$$

Dim. teo. diff. totale

Tesi

$$f(x_0 + R, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + R f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + o(\sqrt{R^2 + k^2})$$



$$f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \underbrace{f(x_0 + R, y_0 + k) - f(x_0 + R, y_0)}_{k \cdot f_y(x_0 + R, y_0 + c_2)} + \underbrace{f(x_0 + R, y_0) - f(x_0, y_0)}_{R f_x(x_0 + c_1, y_0)}$$

Lagrange di Analisi 1

Ora

$$R f_x(x_0 + c_1, y_0) = \underbrace{R f_x(x_0, y_0)}_{\text{quello che volevo}} + R [f_x(x_0 + c_1, y_0) - f_x(x_0, y_0)]$$

Basta dimostrare che l'altro è $o(\sqrt{R^2 + k^2})$

$$R [f_x(\dots) - f_x(\dots)] = \sqrt{R^2 + k^2} \boxed{\frac{R}{\sqrt{R^2 + k^2}}} \boxed{[f_x(\dots) - f_x(\dots)]}$$

≤ 1
in val. assoluto

$\downarrow$
 0
perché abbiamo come ipotesi che f_x è continua in (x_0, y_0)

Stesso discorso per f_y .

— 0 — 0 —