

Derivate in più variabili

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

→ Si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

esiste ed è reale. Il limite si indica con $f'(x_0)$

→ Si dice che f è differentiabile in x_0 se

esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0^+$$

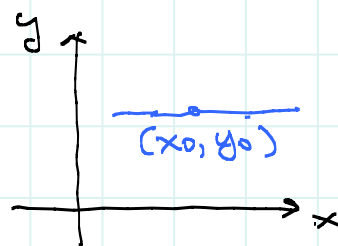
Teo. f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è diff. in x_0

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Def. Si dice che f è derivabile parzialmente risp. a x nel punto (x_0, y_0) se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



esiste ed è reale. In tal caso il limite si indica con uno di questi simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0)$$

$$D_x f(x_0, y_0)$$

In modo analogo si definisce $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Def. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ con $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ($(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$).

Chiamiamo $v = (\alpha, \beta)$ (direzione)

Si dice che f è derivabile in (x_0, y_0) lungo la direzione v se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

esiste ed è reale. Si indica con $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$

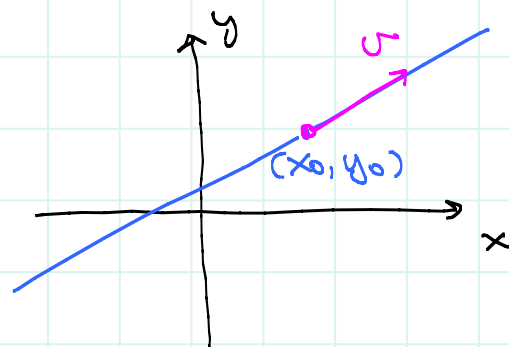
Oss. $\rightarrow$ Le derivate parziali corrispondono a $v = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$

$\rightarrow$ In generale ci sto muovendo sulla retta
 $(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) = (x_0, y_0) + t(\alpha, \beta)$

Oss. Nel caso generale di
 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$
le derivate parziali diventano

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h}$$

$e_i = i$ -esimo vettore della base canonica



le derivate direzionali diventano

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$

$v \in \mathbb{R}^d$ con $v \neq 0$.

Nel caso in cui $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}^d$, assumeremo sempre che x_0 sia interno a D , cioè $B(x_0, r) \subseteq D$ per un certo $r > 0$.

Def. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0) se esistono α, β in $\mathbb{R}$ t.c. du

lunghezza dello spostamento

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$

Se fosse $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}^d$ diventa ...
 f è diff. in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

↑ ↑ ↑ ↑
vettori prod. scalare norma del vettore limite in più variabili

Notazione Si indica con ∇f il gradiente di f , cioè il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f .

Teorema Sia $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
Supponiamo che f sia differenziabile in x_0 .
Allora

- (1) f è continua in x_0
- (2) esistono le derivate parziali di f in x_0 e
 $\alpha = \nabla f(x_0)$
- (3) esistono le derivate direzionali di f in x_0 e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(x_0) &= \langle \alpha, u \rangle \quad \text{per ogni } u \in \mathbb{R}^d - \{0\} \\ &= \langle \nabla f(x_0), u \rangle \end{aligned}$$

Invece (1) + (2) + (3) NON IMPLICANO in generale che f è differenziabile in x_0 .

[Vedi esempio della lezione 3 alla fine]

↑ Esistono e sono tutte nulle le derivate parziali e direzionali nell'origine, ma f non è continua.

Idea di parti della dimostrazioni

Mettiamoci in d variabili direttamente.

Ipotesi: $f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \alpha, R \rangle + o(|R|)$

Voglio fare la derivata nella direzione v . Uso $R = t v$
↑ numero ↑ vettore $\neq 0$

$$f(x_0 + t v) = f(x_0) + \langle \alpha, t v \rangle + o(|t v|)$$
$$t \langle \alpha, v \rangle \quad o(|t| \cdot |v|)$$

↑ ↑
val. assoluto di numero norma di vettore

$$\frac{f(x_0 + t v) - f(x_0)}{t} = \frac{\cancel{f(x_0)} + t \langle \alpha, v \rangle + o(|t| \cdot |v|) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$
$$= \langle \alpha, v \rangle + \boxed{\frac{o(|t| \cdot |v|)}{t}}$$

↓
0

Per giustificare l'ultimo limite, "sostituiamo" la def. di o piccolo

$$o(|R|) = |R| \cdot \omega(R) \quad \text{con} \quad \lim_{R \rightarrow 0} \omega(R) = 0$$

$$\frac{o(|t| \cdot |v|)}{t} = \boxed{\frac{|t| \cdot |v|}{t}} \cdot \omega(t v)$$

≤ |v| ↓
0

[f è $o(g)$ se $f = g \cdot \omega$ con $\omega \rightarrow 0$ nel p.to dato].

Usando $v = e_i$ si hanno le derivate parziali
— 0 — 0 —