

Esempi di limiti AL FINITO per funzioni di più variabili.

Con un cambio di variabili, si riporta il limite in $(0,0)$

ESISTENZA

① Cerco di fare stime con funzioni continue + metateorema

$$g_1(x,y) \leq f(x,y) \leq g_2(x,y)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 continue con lo stesso limite
 per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

② Coordinate polari + stima che non dipende da θ

$$g_1(\rho) \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g_2(\rho)$$

$\rightarrow$ non dipendono da θ $\leftarrow$

Spero che $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} g_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} g_2(\rho)$

③ Uso l'equivalenza con le successioni

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

se e solo se $f(x_n, y_n) \rightarrow l$ per ogni coppia di succ.
 $x_n \rightarrow 0 \quad y_n \rightarrow 0$

NON ESISTENZA

① Trovo due coppie di succ. $x_n \rightarrow 0 \quad y_n \rightarrow 0$
 $\hat{x}_n \rightarrow 0 \quad \hat{y}_n \rightarrow 0$

tali che

$$f(x_n, y_n) \rightarrow l_1$$

$$f(\hat{x}_n, \hat{y}_n) \rightarrow l_2$$

$$l_1 \neq l_2$$

② Trovo due vie diverse che tendono a $(0,0)$ su cui il limite assume due valori diversi.

Esempio 1 $f(x,y) = \frac{y^2}{x+y}$ definita per $x > 0$ e $y > 0$

Nell'origine è $\frac{0}{0}$.

Dico che $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x > 0, y > 0}} \frac{y^2}{x+y} = 0$

$$\underbrace{0}_{\substack{\text{uso che} \\ x > 0 \text{ e } y > 0}} \leq \frac{y^2}{x+y} \leq \frac{y^2}{y} = \underbrace{y}_0$$

Conclusione con carabinieri

Strategia 2 Passo in polari

$$0 \leq \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho \cos \theta + \rho \sin \theta} = \rho \frac{\overbrace{\sin^2 \theta}^{\leq 1}}{\underbrace{\cos \theta + \sin \theta}_{\geq m > 0}} \leq \rho \frac{1}{m}$$

Solito discorso: considero $\varphi(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$

Si tratta di una funzione continua

Quando $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (1° quadrante) assume un valore minimo (teo. di Weierstrass) per un certo $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Questo valore non può essere negativo perché $\sin \theta_0 \geq 0$ e $\cos \theta_0 \geq 0$.

Non può essere nemmeno nullo perché $\sin \theta_0$ e $\cos \theta_0$ non possono essere entrambi nulli.

Quel minimo chiamiamo m .

Esempio 2

Dico che $\lim = 0$. Uso trucco del valore assoluto e passo in polari

$$0 \leq \frac{\rho^* \boxed{|\cos^5 \theta \cdot \sin^2 \theta|} \leq 1}{\cancel{\rho^6} \boxed{(\cos^6 \theta + \sin^6 \theta)} \geq m > 0} \leq \rho \cdot \frac{1}{m}$$

solito discorso con $\theta \in [0, 2\pi]$

Solito finale

Esempio 3 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad [= \frac{0}{0}]$

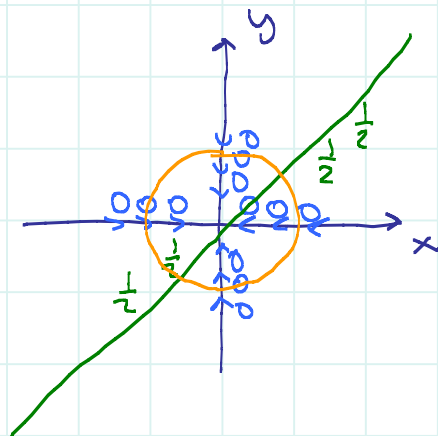
Questo limite NON ESISTE

$$f(t, 0) \equiv 0$$

$$\varphi(0, t) \equiv 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2} \neq 0$$



Esempio 4 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0$

$$\textcircled{0} \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^4} \leq \frac{x^2 |y|}{x^2} = \textcircled{|y|} \downarrow 0$$

Esempio 5 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

Provo con le coord. polari:

$$\frac{\rho |\cos \theta| \cdot \rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\rho |\cos \theta| \cdot \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$$

→ Faccio limite per $\rho \rightarrow 0$. Viene $\frac{0}{\cos^2 \theta} = 0$ se $\cos \theta \neq 0$.

→ se $\cos \theta = 0$, siamo sull'asse y , dove $f(x, y) \equiv 0$.

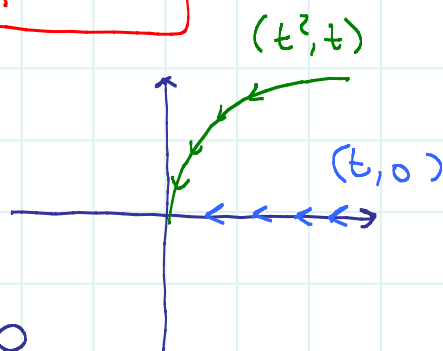
Quindi in ogni caso il limite viene 0.

SPAZZATURA: NON SI RAGIONA A θ fisso!!

Il limite non esiste!

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = 0 \quad (\text{asse } x)$$

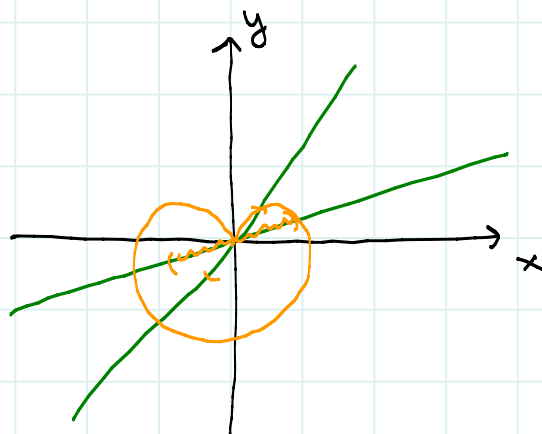
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$



In questo esempio il limite su tutte le rette è $= 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot mt}{t^2 + m^4 t^4} = 0 \quad \text{per ogni } m.$$

Su ogni retta c'è un intervallo in cui $|f| \leq \varepsilon$



Ma non è detto che esista tutto un cerchio in cui $|f| \leq \varepsilon$

→ su ogni retta il limite nell'origine è 0.

→ globalmente non lo è

