

ANALISI 2 - LEZIONE 02

Come visualizzare $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. $f(x,y)$

Grafico $(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}$
= superficie nello spazio

Due modi per farsi un'idea

→ linee di livello

→ percorsi di omiuo

Esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$

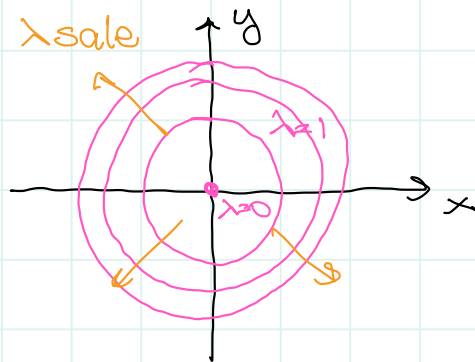
Linee di livello: risolvere

$$f(x,y) = \lambda$$

cioè tagliare il grafico con il piano $z = \lambda$
In questo caso

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

- se $\lambda < 0 \rightsquigarrow \emptyset$
- se $\lambda = 0 \rightsquigarrow (0,0)$
- se $\lambda > 0 \rightsquigarrow$ circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



Percorsi di omiuo

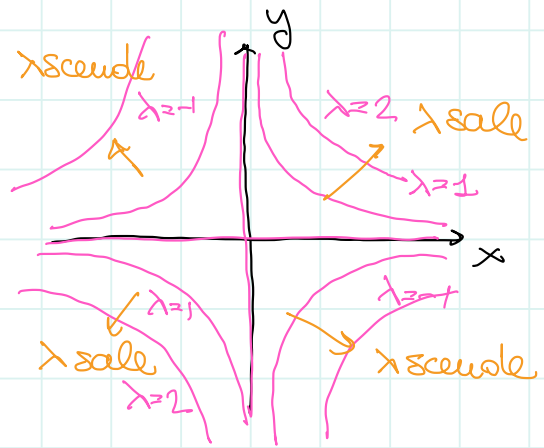
$f(t,0) = t^2 \leftarrow$ quota a cui si trova un omiuo che dall'alto percorre l'asse x

$f(0,t) = t^2 \leftarrow$ asse y

$$f(t, t) = 2t^2$$

Esempio 2 $f(x, y) = xy$

Linee di livello $xy = \lambda$

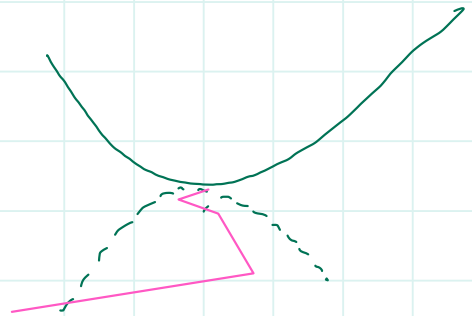


- $\lambda = 0 \rightsquigarrow xy = 0 \rightsquigarrow$ due assi
- $\lambda > 0 \rightsquigarrow$ 1° e 3° quadrante
- $\lambda < 0 \rightsquigarrow$ 2° e 4°

$$f(t, 0) \equiv 0 \quad f(0, t) \equiv 0$$

$$f(t, t) = t^2$$

$$f(t, -t) = -t^2$$



Limite 1 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cos(xy) + \log(y+2)}{x + \sqrt{y} + 7} = \frac{\log 2}{7}$

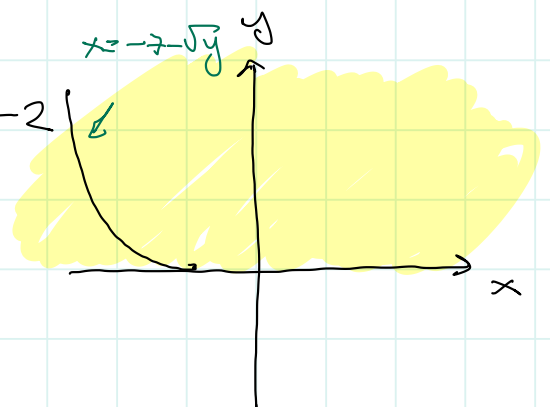
↑
potenzialmente crea
problemi, ma $(0,0)$ è
un p.to di accumulazione

Dove è definita la funzione?

$$\log(y+2) \rightsquigarrow y+2 > 0 \rightsquigarrow y > -2$$

$$\sqrt{y} \rightsquigarrow y \geq 0$$

$$x + \sqrt{y} + 7 \neq 0 \rightsquigarrow x \neq -7 - \sqrt{y}$$



Limite 2 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

la funzione è definita per $(x, y) \neq (0, 0)$

Dico che il limite esiste e fa 0.

1° modo Ricordo il trucco del valore assoluto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$$

A questo punto uso il teorema dei carabinieri

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} = \boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \cdot |x| \leq \begin{array}{c} |x| \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

≤ 1

Quindi anche $f(x,y) \rightarrow 0$.

Occhio che è sbagliato scrivere $\frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot x \leq x$

perché vale solo se $x \geq 0$.

2° modo Uso coord. polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{\rho^3 \cos^3 \theta}{\rho^2} = \rho \cos^3 \theta$$

Dobbiamo fare $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^3 \theta$

Trucco del valore assoluto $0 \leq |\rho \cos^3 \theta| \leq \rho$

Quando $\rho \rightarrow 0$, i termini a dx e sx tendono a 0.

Come fare un limite in coord. polari per $(x,y) \rightarrow (0,0)$

→ sostituisco $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

→ provo ad ottenere qualcosa del tipo

$$\underset{\uparrow}{f_2(0)} \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq \underset{\uparrow}{f_1(0)}$$

solo ρ a dx e sx

→ Spesso che $\lim_{\rho \rightarrow 0} f_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} f_2(\rho)$

SLOGAN Liberarsi di θ !!!