

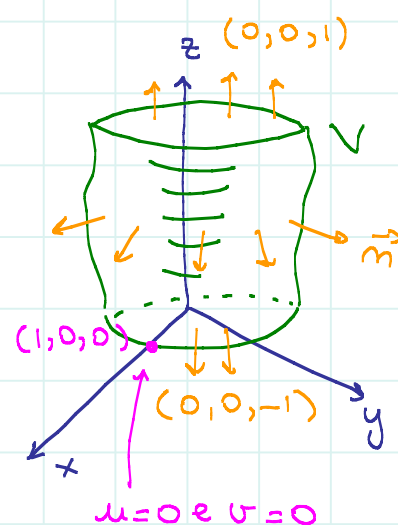
Esercizio 1 Consideriamo la sup. parametrizzata da

$$\phi(u, v) = ((1+u)\cos v, (1+u^3)\sin v, u+u^2) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Consideriamo il solido V limitato dal sostegno di ϕ e dai piani $z=0$ e $z=2$.

Determinare volume e coord. del baricentro.

La z va in maniera monotona da $z=0$ a $z=2$. Fissato $z \in [0, 2]$ trovo univocamente u tale che $u+u^2=z$. La sezione ad altezza z è parametrizzata da v e sono ellissi.



$$\text{Vol}(V) = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_V \text{div } E \, dx \, dy \, dz$$

$$E = (x, 0, 0)$$

$$E = (0, 0, z)$$

$$= \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\partial V = \text{sostegno di } \phi + 2 \text{ basi sotto e sopra}$

$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \underbrace{\int_{\text{Basi}} \langle E, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{\text{viene } = 0 \text{ se abbiamo scelto } E \text{ senza componenti } z}$$

viene = 0 se abbiamo scelto E senza componenti z

Domanda: su S il vettore $\phi_u \wedge \phi_v$ è nel verso giusto?

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \cos v & 3u^2 \sin v & 1+2u \\ -(1+u) \sin v & (1+u^3) \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (-(1+2u)(1+u^3) \cos v, -(1+2u)(1+u) \sin v, (1+u^3) \cos^2 v + 3u^2(1+u) \sin v)$$

Quando $u = v = 0$ diventa

$$(-1, 0, 1)$$

↑ sembra che il verso sia quello opposto, quindi ci vuole un segno -

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \underbrace{(1+u) \cos v}_x \underbrace{(1+2u)(1+u^3) \cos v}_{M_1} \\ &= \pi \int_0^1 \text{polinomio}(u) du = \text{si fa.} \end{aligned}$$

Per fare il baricentro devo integrare x, y, z .

L'integrale di x e y farà 0. Per integrare z faccio lo stesso procedimento con $E = (xz, 0, 0)$.

Analogamente con i campi $(0, y, 0)$ e $(0, yz, 0)$. [Provare per verifica]

Se invece partivo con $E = (0, 0, z)$, allora

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \int_S + \int_{\text{Base Sotto}} + \int_{\text{Base Sopra}} \\ &\quad \begin{array}{l} \text{si fa come negli altri casi.} \\ \uparrow \\ \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle = 0 \\ \uparrow \\ = 0 \text{ su } z=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{2} \cdot \text{Area}(\text{Base sopra}) \\ \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \\ \uparrow \quad \nwarrow \\ (0, 0, 2) \quad (0, 0, 1) \end{array} \end{aligned}$$

Esempio 2 La tegola

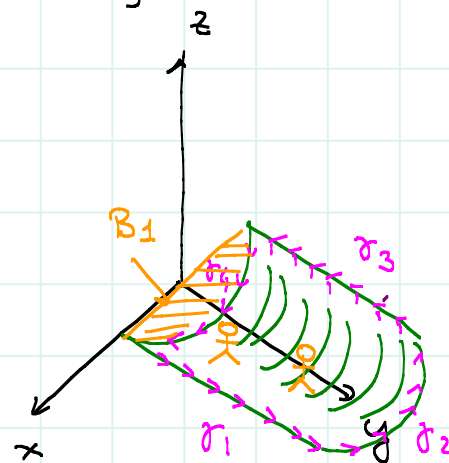
solo bordo

solo parte sotto
piano $z=0$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 = 2}_{\substack{\text{cilindro con} \\ \text{asse lungo} \\ \text{asse } y}}, 0 \leq y \leq 3, \underbrace{z \leq 0}_{\text{piano } z=0}\}$$

$$E = (x, x^2 + y, 2z + x^2)$$

Calcolare $\int \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$
 $\uparrow$
 verso l'alto



STOKES telefonato. Chi è ∂T ? Come è orientato

∂T = quattro curve

$$\gamma_1(t) = (\sqrt{2}, t, 0) \quad t \in [0, 3]$$

$$\gamma_2(t) = (\sqrt{2} \cos t, 3, -\sqrt{2} \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_3(t) = (-\sqrt{2}, t, 0) \quad t \in [0, 3] \text{ al contrario}$$

$$\gamma_4(t) = (-\sqrt{2}, -t, 0) \quad t \in [-3, 0]$$

$$\gamma_5(t) = (\sqrt{2} \cos t, 0, -\sqrt{2} \sin t) \quad t \in [0, \pi] \text{ al contrario}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} A dx + B dy + C dz = \text{abbastanza semplici}$$

Calcolare $\int_T \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

1° modo Con la definizione si fa tranquillo (*)

2° modo Consideriamo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + z^2 \leq 2}_{\uparrow \uparrow}, 0 \leq y \leq 3, z \leq 0\}$$

Allora $\iiint_V \text{div } E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$
 $\uparrow$
 4 pezzi
 4 Vol (V)

∂V ha 4 pezzi

- T , ma $\vec{n}$ esterna è opposta a quella che serve a noi
- $R = \text{rettangolo } (u, v, 0)$ con $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $v \in [0, 3]$
con $\vec{n} = (0, 0, 1)$
- Semibase B_1 con $\vec{n} = (0, -1, 0)$
 $\uparrow x^2 + z^2 \leq 2, z \leq 0, y = 0$
- Semibase B_2 con $\vec{n} = (0, 1, 0)$
 $\uparrow x^2 + z^2 \leq 2, z \leq 0, y = 3$

Tutte le volte c'è una sola componente del campo.

⊗ $T = \text{supporto di}$

$$\Phi(u, v) = (\sqrt{2} \cos v, u, -\sqrt{2} \sin v) \quad (u, v) \in [0, 3] \times [0, \pi]$$

— 0 — 0 —