

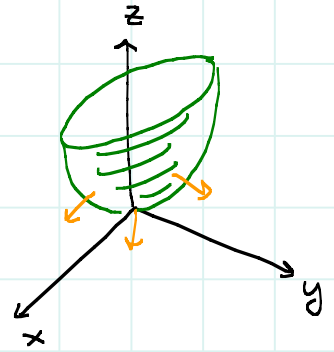
QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN FLUSSO

(di un campo vett. attraverso una sup. ORIENTATA)

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑
scelta del vettore
normale

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1 \}$$



$$\vec{E} = (x+y^2, y+z, xy-2z)$$

$\vec{n}$ orientata "verso il basso" (in $(0,0,0)$ viene $(0,0,-1)$)

1ª Strategia: DEFINIZIONE BOVINA

Road map: → scrivo una param $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di S

→ controllo se (M_1, M_2, M_3) è concorde con $\vec{n}$

→ Calcolo

$$\iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

Nel vostro esempio $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + 4v^2)$

$$(u, v) \in \Omega = \{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 4v^2 \leq 1 \}$$

*	*	*	
1	0	2u	↪ $(M_1, M_2, M_3) = (-2u, -8v, 1)$
0	1	8v	

Controllo il verso della normale. Il p.to $(0,0,0)$ della sup. corrisponde a $(u, v) = (0,0)$ e lì $(M_1, M_2, M_3) = (0,0,1)$, quindi ha il verso sbagliato.

Allora

segno cambiato

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = - \iiint_{\Omega} \left\{ \underbrace{(u+v^2)}_{M_1} \underbrace{(-2u)}_{M_2} + \underbrace{(v+u^2+4v^2)}_{M_2} \underbrace{(-8v)}_{M_2} + \underbrace{(uv-2u^2-8v^2)}_{M_3} \cdot 1 \right\} du dv$$

= è un conto che si fa

2ª strategia: STOKES con inversione del rotore

Road map : $\rightarrow$ spero che E sia rot F (ad esempio perché $\text{div } E = 0$ e d'insieme è facile bene)
 $\rightarrow$ calcolo F
 $\rightarrow$ calcolo la circuitazione di F lungo ∂S dopo averlo orientato per bene

$$E = (x+y^2, y+z, xy-2z) \quad \text{div } E = 0 \quad \therefore$$

$$\text{Calcoliamo } F = (A, B, C)$$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{array}$$

$$C_y - B_z = x + y^2$$

$$A_z - C_x = y + z$$

$$B_x - A_y = xy - 2z$$

$$\text{Sceglio } B \equiv 0$$

$$C_y = x + y^2 \quad \leadsto C = xy + \frac{1}{3}y^3$$

$$-A_y = xy - 2z \quad \leadsto A = -\frac{1}{2}xy^2 + 2yz + \varphi(x, z)$$

$$A_y = -xy + 2z$$

Vado nella restante equazione

$$A_z - C_x = \cancel{2y} + \varphi_z(x, z) - \cancel{y} = y + z \quad \leadsto \varphi_z(x, z) = z$$

$$\text{Posso scegliere } \varphi = \frac{1}{2}z^2$$

Conclusione

$$F = \left(-\frac{1}{2}xy^2 + 2yz + \frac{1}{2}z^2, 0, xy + \frac{1}{3}y^3\right)$$

Ora uso Stokes:

$$\int_S \langle E, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } F, \vec{n} \rangle d\sigma = \int A dx + B dy + C dz$$

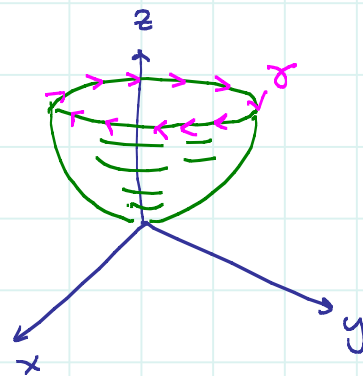
⊗ dove percorrere
∂S nel verso giusto!

Ora devo scrivere una param. di γ che
ha come sostegno

$$\partial S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 = z = 1 \}$$

$$\gamma(t) = (\cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, 1) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

CON IL VERSO OPPOSTO



In conclusione otteniamo

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz &= - \int_{\gamma} A dx = - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta \cdot \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \sin \theta + \frac{1}{2} \right) (-\sin \theta) d\theta \\ &\quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{0 per merito} & \text{0 per merito} \\ \text{di B} & \text{di dz} \end{matrix} \\ &= \text{conto che si fa} \end{aligned}$$

inversione del verso

3^a strategia: STOKES con cambio di superficie

- Road map:
- spero che E sia $\text{rot } F$, ma non calcolo F
 - sostituisco S con una sup S_1 più "comoda"
 - che abbia lo stesso bordo orientato allo stesso modo
 - calcolo

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Perché funziona?

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \stackrel{E = \text{rot } F}{=} \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$\text{Stokes su } S \rightarrow = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$\partial S = \partial S_1 \rightarrow = \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle ds$$

$$\text{Stokes su } S_1 \rightarrow = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$$E = \text{rot } F \rightarrow = \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

In questo caso uso

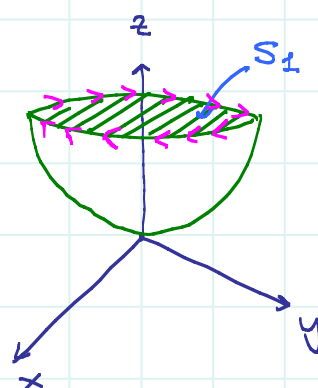
$$S_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq 1, z = 1 \}$$

con normale $\vec{n} = (0, 0, -1)$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{x^2 + 4y^2 \leq 1} -1 \cdot \underbrace{(xy - 2)}_{xy - 2z} dx dy$$

(le altre 2 componenti di E si scontrano
con gli 0 di $\vec{n}$)

= si fa a mente



4ª Strategia: tappo la superficie e uso teo. div.

Roof map: $\rightarrow$ considero il solido V ottenuto aggiungendo
eventuali "tappi"
 $\rightarrow$ applico teo. div. in V .

Nell'esempio V è la ciotola tappata

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1 \}$$

Teo. div. :

normale esterna a V

$$\begin{aligned}\iint_V \operatorname{div} E &= \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma\end{aligned}$$

$\uparrow$
quella che
vogliamo

$\uparrow$
 $(0,0,1)$

Nel nostro caso viene $\operatorname{div} E = 0$, quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
con normale $(0,0,1)$

Oss. La strategia 4 funziona anche se $\operatorname{div} E \neq 0$,
mentre la 2 e la 3 no.

— 0 — 0 —