

Teorema della divergenza

$d=2$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} A \, dy - B \, dx$$

int. doppio

integr. curvilinea
di funzione

integr. curv. di
forma diff.

versore normale
esterno

curva che percorre $\partial\Omega$
lasciando Ω a sx

$\vec{E} = (A, B)$

$d=3$

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\Phi} AM_1 + BM_2 + CM_3 \, du \, dv$$

int. triplo

integr. sup.

$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una param.
di $\partial\Omega$
con $D \subseteq \mathbb{R}^2$

versore norm.
esterno

$(M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$
con segno giusto

Formula di integr. per parti

f = funzione scalare

E = campo di vettori

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Caso speciale in cui $\vec{E} = \nabla g$ con g funzione scalare

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \langle \nabla g, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Laplaciano

$\frac{\partial g}{\partial n}$ = derivata
direzionale

Banale Formula di integr. per parti $\Rightarrow$ teo. div.
[Basta prendere $f \equiv 1$]

Facile Teo. div. $\Rightarrow$ formula integr. per parti

Applico il teo. della divergenza usu al campo $\vec{E}$, ma al campo $f\vec{E}$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) = \int_{\partial\Omega} \langle f\vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$
teo. div. applicato
al campo $f\vec{E}$

Ora uso che $\operatorname{div}(f\vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}$ e quindi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) = \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E}$$

$\downarrow$ si porta a dx

per $d=3$ cambia poco

Ragionevole Dim. del teo. della div. in dimensione $\boxed{d=2}$ nel
caso in cui Ω è un insieme normale

Dimostriamo separatamente i due pezzi

①

$$\iint_{\Omega} A_x dx dy = \int_{\gamma} A dy$$

②

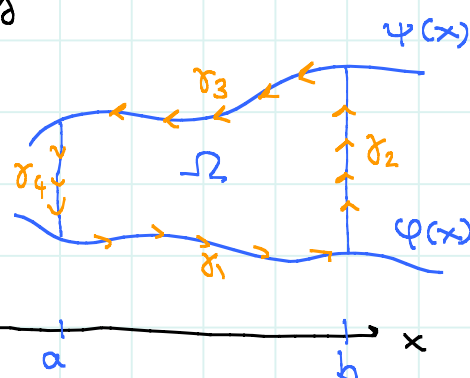
$$\iint_{\Omega} B_y dx dy = - \int_{\gamma} B dx$$

La somma dei due è quello che vogliamo.

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

γ_1	$(t, \varphi(t))$	$t \in [a, b]$
γ_2	(b, t)	$t \in [\varphi(b), \psi(b)]$
γ_3	$(t, \psi(t))$	$t \in [a, b]$
γ_4	(a, t)	$t \in [\varphi(a), \psi(a)]$

} al contrario



Dim ② $\iint_{\Omega} B_y(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} B_y(x, y) dy$

$$= \int_a^b dx [B(x, y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}$$

$$= \int_a^b B(x, \psi(x)) dx - \int_a^b B(x, \varphi(x)) dx$$

$$\int_{\gamma} B(x, y) dx = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

$\begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{O} \\ \parallel \\ \text{O} \end{matrix}$

$$\int_{\gamma_1} B(x, y) dx = \int_a^b B(t, \varphi(t)) \cdot \overset{\uparrow \dot{x}}{1} dt$$

$$\int_{\gamma_2} B(x, y) dx = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} B(b, t) \cdot \overset{\uparrow \dot{x}}{0} dt$$

$$\int_{\gamma_3} B(x, y) dx = - \int_a^b B(t, \psi(t)) \cdot \overset{\uparrow \dot{x}}{1} dt$$

$\uparrow$
percorsa al contrario

Abbiamo ottenuto esattamente i pezzi che servivano

Dim di ① Idea: definire la funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b]$$

Derivando si ottiene (integr. dipendente da parametro)

$$H'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy + A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) - A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x)$$

Adesso usiamo che

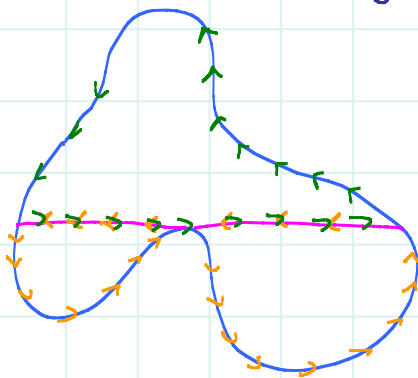
$$\int_a^b H'(x) dx = H(b) - H(a)$$

Sostituisco tutto

$$\begin{aligned} \int_a^b H'(x) dx &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x, y) dy \rightsquigarrow \iint_{\Sigma} A_x(x, y) dx dy \\ &+ \int_a^b A(x, \psi(x)) \dot{\psi}(x) dx \rightsquigarrow \int_{\sigma_3} A(x, y) dy \quad \uparrow (t, \psi(t)) \\ &- \int_a^b A(x, \varphi(x)) \dot{\varphi}(x) dx \rightsquigarrow - \int_{\sigma_1} A(x, y) dy \quad \uparrow (t, \varphi(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} A(b, y) dy - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} A(a, y) dy \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\int_{\sigma_2} A(x, y) dy - \int_{\sigma_4} A(x, y) dy \\ &\quad \uparrow (b, t) \qquad \qquad \uparrow (a, t) \end{aligned}$$

Portando tutto dalla parte giusta abbiamo la formula



Idea molto brutale e non formalizzabile
 → quando spesso in insieme normali, i "bordi aggiunti" si semplificano.