

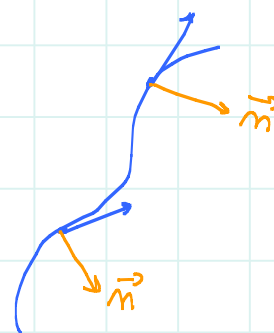
INTEGRALI DI FLUSSO

Versione 2 dimensionale

- Ingredienti :
- Campo di vettori $E = (A(x,y), B(x,y))$
 - Curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 - ORIENTAZIONE della curva, cioè una scelta del vettore normale $\vec{n}$ alla curva

Vettore normale canonico = tangente ruotato di 90° orario

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$



$$\text{tangente} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}$$

$$\vec{n} = (\dot{y}(t), -\dot{x}(t)) \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} \quad \text{canonico}$$

$$\text{Flusso di } E \text{ attraverso } \gamma = \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

Interpretazione fisica: • il sostegno di γ è una vela

• E è la direzione del vento

• il flusso è quanto il vento spinge la vela nella direzione di $\vec{n}$

Descriviamo in altro modo, supponendo che $\vec{n}$ sia quello canonico (altrimenti cambio segno o percorso in senso inverso della curva)

$$\vec{n} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle E, n \rangle ds &= \int_a^b \left\{ A(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dots}} + B(x(t), y(t)) \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dots}} \right\} \sqrt{\dots} dt \\ &= \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \} dt \\ &= \int_{\gamma} A dy - B dx \end{aligned}$$

Conclusione

$$\boxed{\int_{\gamma} \langle E, n \rangle ds = \int_{\gamma} \underbrace{A dy - B dx}_{\text{forma differenziale}}}$$

$\uparrow$ canonico

Oss. A dx abbiamo integrale curvilineo di E scalari n
 A dx abbiamo integrale di una forma che corrisponde
 a fare $(-B, A)$ scalari tangenti
 $\uparrow$ campo (A, B) ruotato di 90° antiorario
 $\nwarrow$ $\vec{n}$ ruotato di 90° antiorario

— o — o —

Versione 3 dimensionale

- Ingredienti :
- campo vettoriale (A, B, C)
 - superficie $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$
 - ORIENTAZIONE della superficie, cioè la scelta di uno dei 2 vettori normali

Il vettore normale canonico è il solito $(M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$ diviso per la norma

$$\text{Flusso di } E \text{ attraverso } S = \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑
integrale superficiale

$$\int_S \langle E, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \left\{ A \frac{M_1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} + B \frac{M_2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} + C \frac{M_3}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} \right\} du dv$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

dove la sup. è parametrizzata da $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

— o — o —

Teorema della DIVERGENZA

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Allora sotto opportune ipotesi di regolarità vale

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

↑
integrale doppio

↑
curva che percorre $\partial\Omega$
lasciando Ω a sx

↑
normale uscente

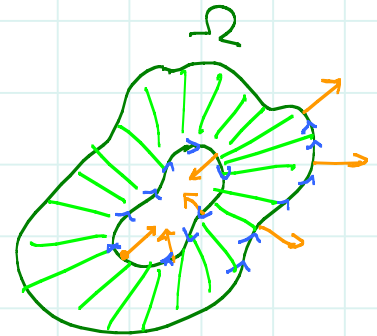
Stessa cosa in $\mathbb{R}^3$, quindi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Allora

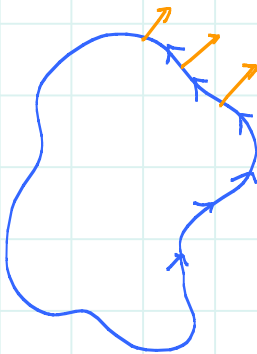
$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} E \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
vettore normale
esterno.

Occhio alla faccenda del dx-sx in dim 2.



Interpretazione ciclistica



Se faccio un giro in bici (chiuso) e ho sempre il vento da destra, che dico all'arrivo.

Se il giro è stato fatto in senso antiorario, allora per forza da qualche parte la divergenza è negativa

Vento da destra = $\langle E, \vec{n} \rangle < 0$ sempre
— o — o —

GAUSS-GREEN = integrazione per parti di Analisi 2

$$\int_{\Omega} \varphi \operatorname{div} \vec{E} \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi, \vec{E} \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
integrale doppio o
triplo

↑
integrale doppio o
triplo

↑
integrale sul
bordo

↑
vettore normale esterno

Quando $\varphi \equiv 1$ otteniamo il precedente.

— o — o —